

Interpolação no Método dos Elementos Finitos

Ingredientes necessários para uma formulação geral pelo método dos elementos finitos de um fenômeno físico:

- Funcional que descreve o problema físico.
- Matriz das funções de forma $[N]$ que descreve a interpolação dentro de cada elemento.

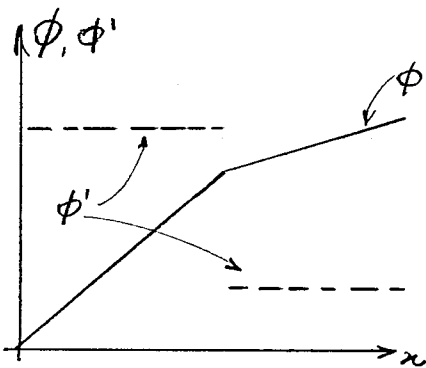
Funções de forma normalmente utilizadas são polinômios:

Linear, quadráticas ou cúbicas
simples \longrightarrow complicadas

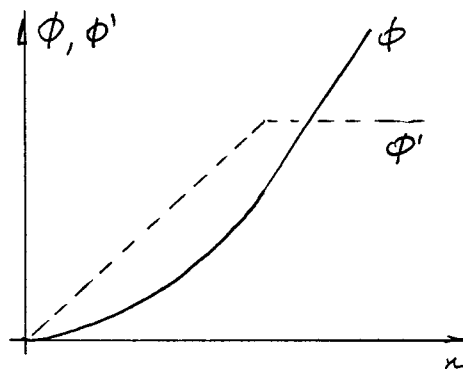
Deve-se usar vários elementos simples ou poucos complicados?
Resp.: Experiência.

• Grau de continuidade

$C^m \longrightarrow$ derivadas do campo até o grau m são contínuas



Continuidade C^0



Continuidade C^1

• Funções de Forma para continuidade C^0

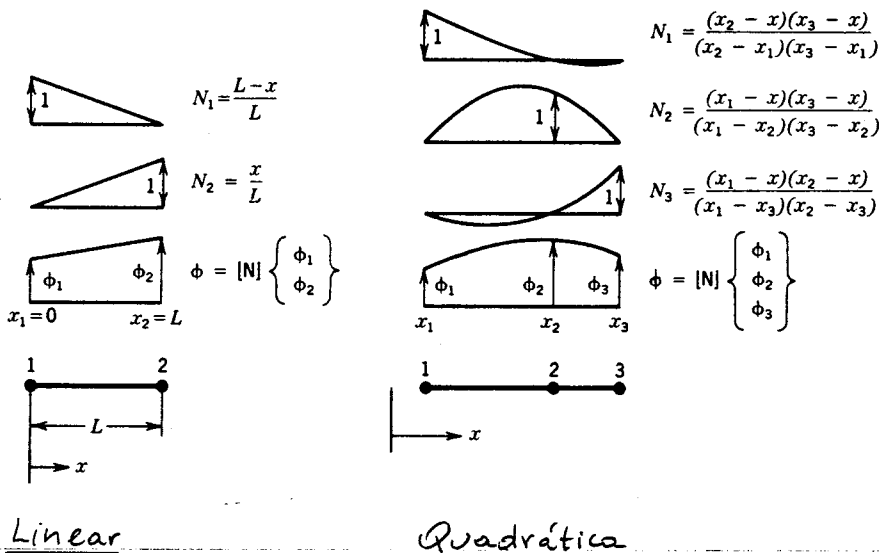
C^0 → continuidade no campo da variável fundamental (deslocamento por exemplo) entre os diversos elementos, mas suas derivadas não são contínuas entre os elementos.

$$\phi = [N] \{ \phi_e \}$$

↑
valores nodais de um elemento

$$\text{ou } \phi = \sum_{i=1}^m N_i \phi_i$$

- Uma dimensão



$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{(x_2-x)(x_3-x)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)} & \frac{(x_1-x)(x_3-x)}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)} & \frac{(x_1-x)(x_2-x)}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \end{bmatrix}$$

Observações

1. Todas as funções de forma N_i , e a própria função $\phi(x)$, são polinômios do mesmo grau.
2. Para qualquer função de forma N_i , $N_i = 1$ quando $x = x_i$ e $N_i = 0$ quando $x = x_j$ onde $j \neq i$.
3. $\sum_{i=1}^m N_i = 1$ e $\sum_{i=1}^m N_i' = 0$ para qualquer x .

Generalização: fórmula de interpolação de Lagrange

$\phi = \phi(x) \rightarrow$ polinômio de grau $n-1$ \Rightarrow

$\phi(x)$ fica definido por n valores ϕ_i nas abscissas x_i , respectivamente.

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + \dots + N_n \phi_n$$

onde,

$$N_1 = \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)(x_4 - x) \cdots (x_n - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \cdots (x_n - x_1)}$$

$$N_2 = \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)(x_4 - x) \cdots (x_n - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \cdots (x_n - x_2)}$$

⋮

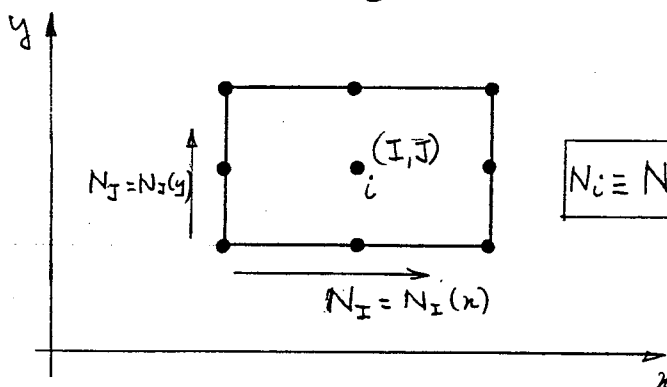
$$N_n = \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x) \cdots (x_{n-1} - x)}{(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)(x_3 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n)}$$

$$N_i = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

— Duas dimensões

$\phi = \phi(x, y)$ onde $\phi = \begin{cases} u \rightarrow \text{deslocamento na} \\ \text{direção } x \\ v \rightarrow \text{deslocamento na} \\ \text{direção } y \end{cases}$

Interpolação Lagrangeana



$$N_i \equiv N_{IJ}(x, y) = N_I(x) N_J(y)$$

$$u = \sum_{i=1}^n u_i N_i$$

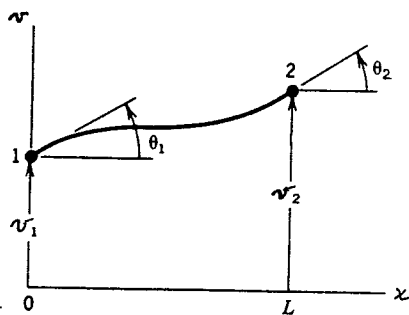
$$v = \sum_{i=1}^n v_i N_i$$

• Funções de forma para continuidade C^1

$C^1 \rightarrow$ continuidade entre os diversos elementos da função fundamental (deslocamento) e de sua primeira derivada.

\Rightarrow Funções de forma para deslocamentos e rotações nodais.

- Uma dimensão



$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$v = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = [X] \{a\}$$

$x=0$

$$d_1 = v(0) \quad ; \quad d_2 = v'(0) = \theta_1$$

$x=L$

$$d_3 = v(L) \quad ; \quad d_4 = v'(L) = \theta_2$$

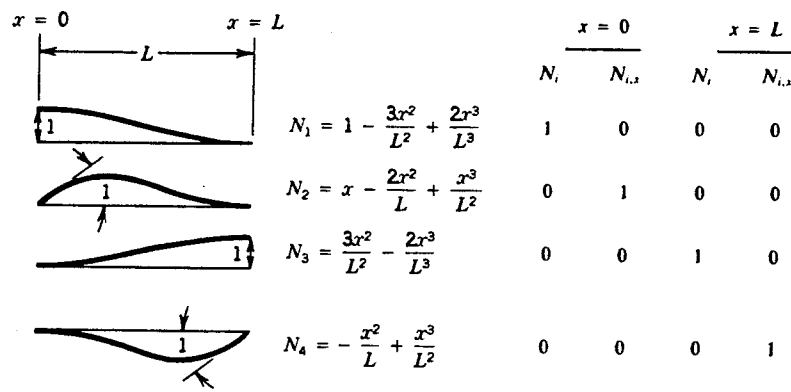
$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{d\} = [C] \{a\}$$



$$\{a\} = [C]^{-1} \{d\}$$

$$\Rightarrow v(x) = [X] [C]^{-1} \{d\} \quad \text{ou} \quad v(x) = [N] \{d\} \quad [N] = [X] [C]^{-1}$$



- Duas dimensões

É bem mais complexo. Será visto quando elementos finitos de placa forem abordados.

- Generalização da determinação de $[K]$ e $\{r_E\}$: (2D)

Energia potencial total $\Pi_P = U + V_E$

$$\Pi_P = \int_V \left(\frac{1}{2} \{E\}^T [E] \{E\} - \{E\}^T [E] \{E_0\} + \{E\}^T \{V_0\} \right) dV$$

$$- \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_S \{u\}^T \{\phi\} dS - \{D\}^T \{P\}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad \{E\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}$$

$\{E_0\} \rightarrow$ deformações iniciais

$\{V_0\} \rightarrow$ tensões residuais

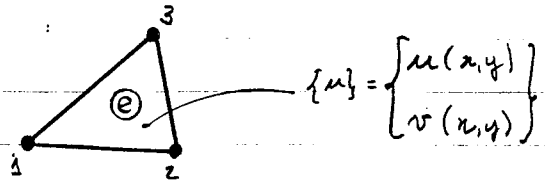
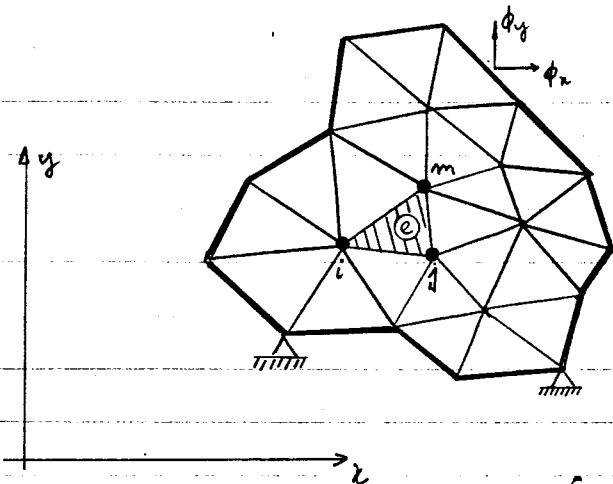
$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \rightarrow$ forças de volume

$\{\phi\} \rightarrow$ forças de superfície

$\{D\} \rightarrow$ deslocamentos nodais

$\{P\} \rightarrow$ forças externas nodais

Metodologia do método dos elementos finitos



Para cada elemento:

$$\{u\} = [N] \{d\}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{\epsilon\} = [D] \{u\}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\{\epsilon\} = [B] \{d\}$$

$$[B] = [D][N] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_P = \sum_{i=1}^{melem} \Pi_{P_i} - \{D\}^T \{P\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Pi_P = \sum_{i=1}^{melem} & \left(\int_{Ve} \frac{1}{2} \{d\}_i^T [B]_i^T [E] [B]_i \{d\}_i dVe - \int_{Ve} \{d\}_i^T [B]_i^T [E] \{\epsilon_0\}_i dVe + \int_{Ve} \{d\}_i^T [B]_i^T \{v_0\}_i dVe \right. \\ & \left. - \int_{Ve} \{d\}_i^T [N]_i^T \{F\}_i dVe - \int_{Se} \{d\}_i^T [N]_i^T \{\phi\}_i dSe \right) - \{D\}^T \{P\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_P = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{elem}} \{d\}_i^T \left(\int_{V_e} [B]_i^T [E]_i [B]_i dV_e \right) \{d\}_i \\ & + \sum_{i=1}^{n_{elem}} \{d\}_i^T \left(- \int_{V_e} [B]_i^T [E]_i \{E_0\}_i dV_e + \int_{V_e} [B]_i^T \{V_0\}_i dV_e \right. \\ & \left. - \int_{V_e} [N]_i^T \{F\}_i dV_e - \int_{S_e} [N]_i^T \{\phi\}_i dS_e \right) - \{D\}^T \{P\} \end{aligned}$$

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{elem}} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i - \sum_{i=1}^{n_{elem}} \{d\}_i^T \{r_E\}_i - \{D\}^T \{P\}$$

$$[K] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV_e$$

$$\{r_E\} = \int_{V_e} [B]^T [E] \{E_0\} dV_e - \int_{V_e} [B]^T \{V_0\} dV_e + \int_{V_e} [N]^T \{F\} dV_e + \int_{S_e} [N]^T \{\phi\} dS_e$$

$$\{d\}_i = [A]_i \{D\}$$

$[A]_i$ → matriz de incidência cinemática do elemento i

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \{D\}^T [K] \{D\} - \{D\}^T \{R\}$$

$$[K] = \sum_{i=1}^{n_{elem}} [A]_i^T [K]_i [A]_i$$

e

$$\{R\} = \{P\} + \sum_{i=1}^{n_{elem}} [A]_i^T \{r_E\}_i$$

$$\delta \Pi_p = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial D_j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{[K] \{D\} = \{R\}}$$

Uma vez introduzidas as condições de contorno e resolvido o sistema de equações, resta calcular as deformações e tensões em cada elemento.

$$\{d\}_i = [A]_i \{D\} \quad \{e\} = [B]_i \{d\}_i$$

$$\{\sigma\} = [E] \{e\} - [E] \{e_0\} + \{\sigma_0\}$$

• Comentário

O problema do método dos elementos finitos se resume na discretização do domínio em vários elementos e na determinação das funções de interpolação (ou de forma) em cada elemento de forma que garanta a convergência da solução obtida.

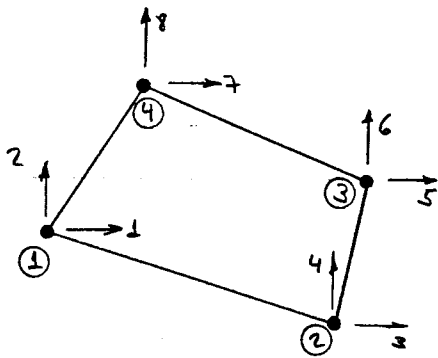
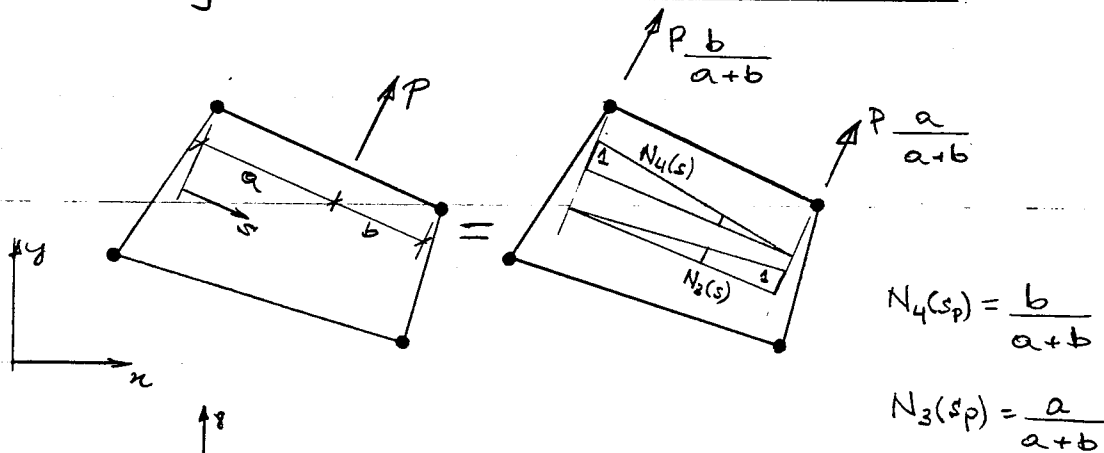
Resumo da determinação de forças equivalentes nodais para cargas de superfície

$$\{r_E\} = \int_{S_e} [N]^T \{ \phi \} dS_e$$

Forças equivalentes nodais são chamadas consistentes porque elas são calculadas utilizando as mesmas funções de forma usadas para calcular a matriz de rigidez do elemento.

Forças equivalentes nodais são estaticamente equivalentes ao carregamento original distribuído. Elas produzem o mesmo trabalho quando é dado um campo de deslocamento compatível com as funções de forma.

- carga concentrada - elemento linear C⁰



$$N_1(s_p) = 0$$

$$N_2(s_p) = 0$$

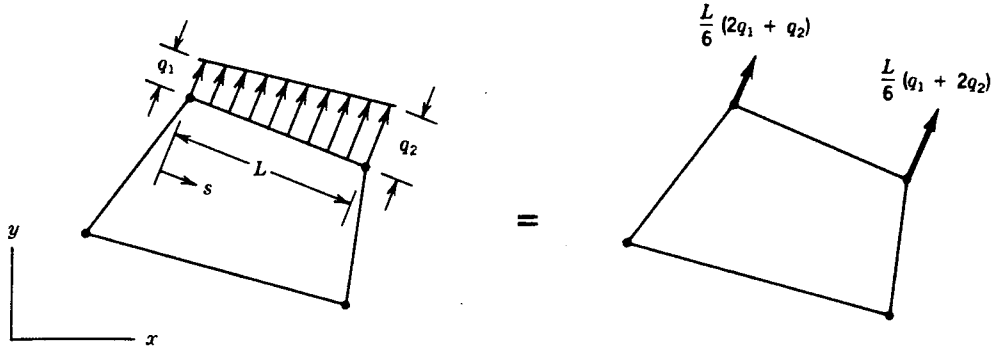
$$r_{E5} = P_x N_3(s_p) = P_x \frac{a}{a+b}$$

$$r_{E6} = P_y N_3(s_p) = P_y \frac{a}{a+b}$$

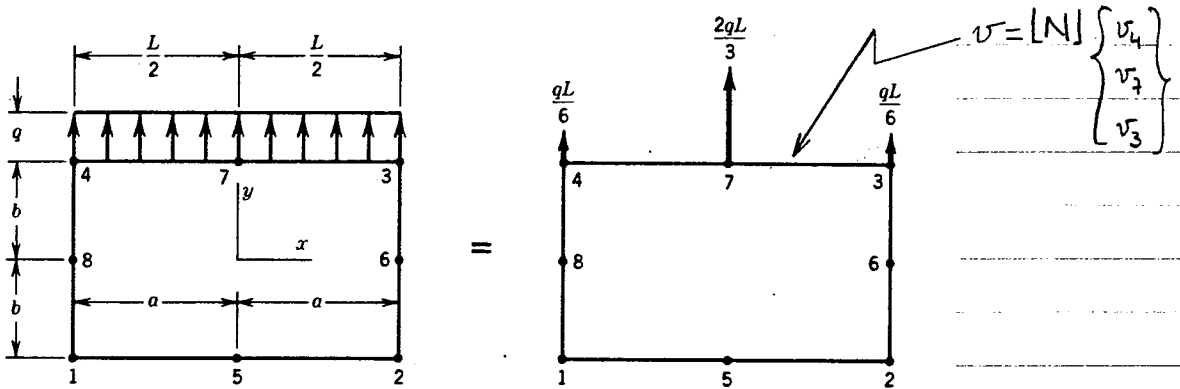
$$r_{E7} = P_x N_4(s_p) = P_x \frac{b}{a+b}$$

$$r_{E8} = P_y N_4(s_p) = P_y \frac{b}{a+b}$$

- carga distribuida - elemento linear C^0

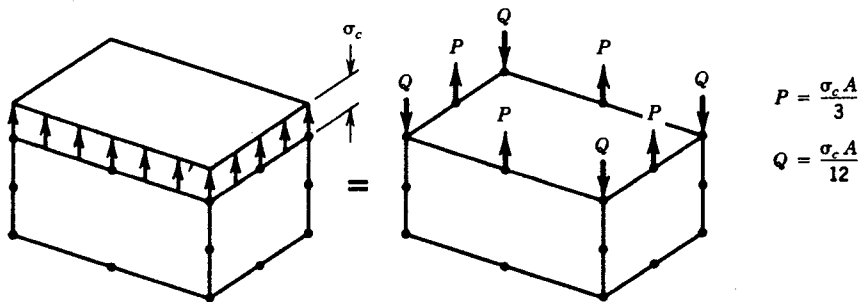


- carga distribuida - elemento cuadrático C^0



$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L} & 1 - \frac{4x^2}{L^2} & \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad \{r_E\} = \int_{-L/2}^{L/2} [N]^T q dx = \begin{Bmatrix} qL/6 \\ 2qL/3 \\ qL/6 \end{Bmatrix}$$

- carga distribuida - elemento sólido cuadrático C^0



Crêterios que Governam a Sele o de Modelos de Elementos Finitos

Na modelagem por elementos finitos existem duas questões que devem ser abordadas: “Qual o grau de aproxima o da soluço encontrada?” e “Como a soluço aproximada pode ser sistematicamente melhorada para chegar   soluço exata?”.

A primeira pergunta   difícil de ser respondida pois ela pressupõe o conhecimento da soluço exata. E o que   necessário para se responder a segunda pergunta   uma garantia de que o modelo vai convergir para a soluço exata a medida que o tamanho dos elementos vão diminuindo e, por conseguinte, o número de equa es vai aumentando. Isto  ,   preciso determinar que, com o aumento do número de elementos, as fun es de campo a serem determinadas podem ser aproximadas quão precisamente quanto desejado.

Existem basicamente dois grupos de condi es que um modelo de elementos finitos deve satisfazer para que haja convergência do método: *condi es de continuidade e de completitude*. Há casos em que se deseja ter uma aproxima o assintótica para a soluço exata. Portanto, *condi es para aproxima o assintótica* estão reunidas em um terceiro grupo.

1. Crêterios de continuidade (ou compatibilidade)

A formula o variacional (ou a formula o ‘fraca’ – integrada por partes) fornece alguns subsídios para examinar os requerimentos de continuidade de um modelo de elementos finitos. A forma geral do princípio variacional  :

$$\pi_p = \int_V A(u) dV + \int_S B(u) dS$$

$$\delta\pi_p = 0$$

Onde o π_p   um funcional (energia potencial total) e A e B são fun es de outras fun es e geralmente envolvem derivadas da fun o de campo fundamental u. Seja a maior order de derivada em A ou B igual a m.

Em geral,   requerido que na soma das contribui es de cada elemento para a energia potencial total não haja perdas, isto  ,

$$\pi_p = \sum_{e=1}^{nelem} \pi_p^e$$

Isto pressupõe que

$$\int_V \sum_e A^e dV = \sum_e \int_{V_e} A^e dV_e$$

isto  , não existe contribui es para a energia potencial total vindas de integra o através das interfaces dos elementos.

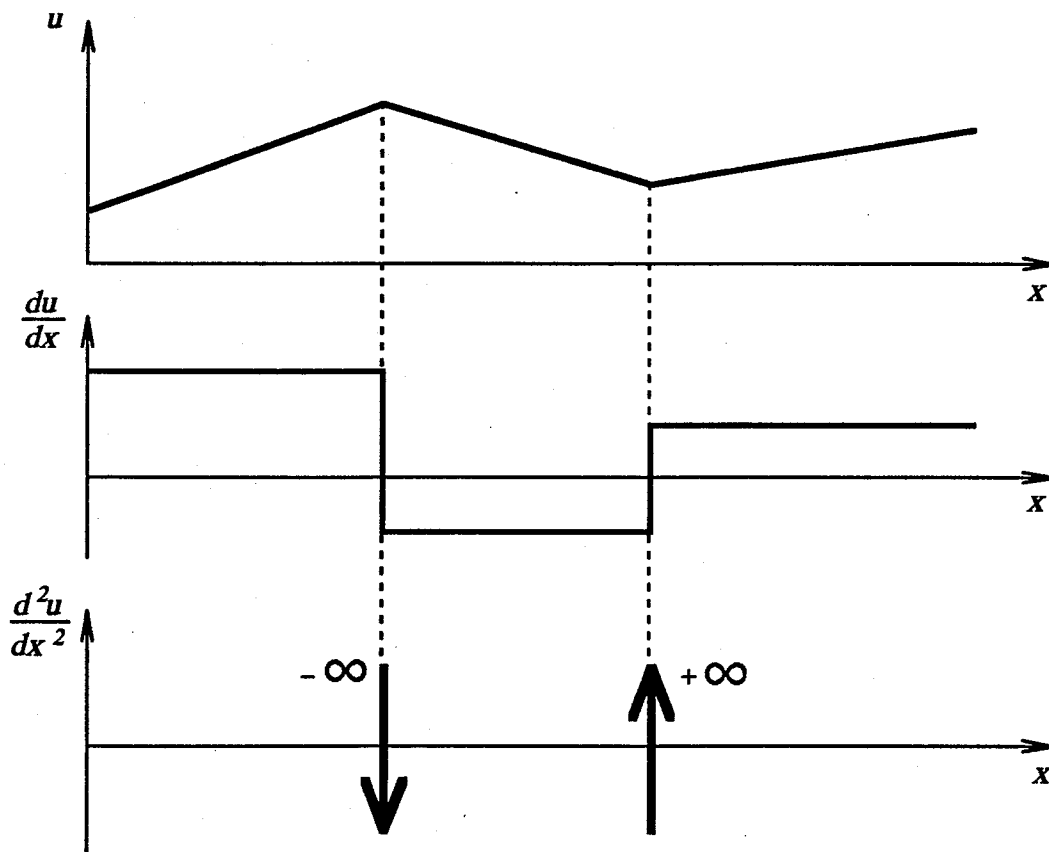
Isto impõe alguns critérios de admissibilidade para a continuidade de uma representação de u por elementos finitos.

Considere o caso em que $m = 1$, isto é, a derivada de mais alto grau em A (ou B) é 1. Então, para integrar

$$\int_V A \, dV$$

não-trivialmente, as derivadas de primeira ordem devem ser não nulas dentro do elemento. Além disso, para integrar nas fronteiras dos elementos, as derivadas contidas em A devem ser integráveis de forma a obter uma avaliação única para a integral.

Neste caso, u deve ser pelo menos de primeira ordem (linear), como mostrado na figura abaixo. Se u fosse de ordem menor que primeira, isto é, constante, a primeira derivada ($m = 1$) não seria integrável através das interfaces entre elementos (função Delta de Dirac).



Seguindo esta linha de raciocínio, pode-se especificar as condições de continuidade:

1a. Continuidade interna:

O modelo de elementos finitos u deve ser diferenciável até a ordem mais alta m que aparece no funcional variacional (para que haja uma integração não-trivial).

1b. Continuidade entre elementos:

O modelo de elementos finitos u deve ser contínuo entre os elementos até uma ordem a menos que a mais alta ordem m que aparece no funcional variacional, isto é, ele deve ser de continuidade C^{m-1} .

<u>Ordem da Eq. Diferencial</u>	<u>Mais alta ordem no funcional (m)</u>	<u>Exemplos</u>	<u>Continuidade entre elementos</u>
2ª	1	Treliça, Chapa, Temperatura	C ⁰
4ª	2	Quadro, Placa, Casca	C ¹

Estas são condições de continuidade suficientes para a convergência do modelo de elementos finitos. Na verdade, a satisfação destas condições de continuidade vão assegurar uma aproximação assintótica da formulação variacional. Isto é, satisfazendo estas condições, a solução aproximada do método dos elementos finitos (assim como do método de Rayleigh-Ritz) fornece sempre um limite superior para a energia potencial total. Além disso, há uma tendência da solução fornecer um limite superior para a rigidez do sistema e um limite inferior para a flexibilidade. Isto porque a solução aproximada da formulação em deslocamentos corresponde a restrições impostas à resposta exata.

Incompatibilidade de deslocamentos entre elementos adjacentes pode causar picos infinitos de deformação nas interfaces dos elementos, fato este que é ignorado na formulação apresentada porque a energia total só leva em consideração a contribuições vindas do interior dos elementos. Entretanto, para haver convergência do método no sentido mais geral, a compatibilidade de deslocamento entre elementos só precisa ser satisfeita *no limite quando estes elementos aproximam um tamanho infinitesimal*. Isto é, se a medida que o tamanho dos elementos diminui e, no limite, a compatibilidade entre elementos é restabelecida, então a formulação já obtida ainda vai tender à resposta exata. Isto é sempre alcançado se não há contribuição para a energia potencial total da integração através das fronteiras dos elementos.

Neste contexto, as deformações são generalizadas, isto é, no caso de continuidade C⁰ a deformação tem a interpretação da teoria da elasticidade para meios contínuos e no caso de continuidade C¹ as deformações também incluem curvaturas de barras, placas e chapas.

2. Condições de completitude

As aproximações discutidas neste contexto são para uma forma integral (energia potencial total). Neste caso, é necessário que cada termo dentro da integral seja, no limite, capaz de ser aproximado tão perto quanto possível. Se a maior ordem de derivada que aparece na integral é igual a m , então é óbvio que a função de interpolação local deve ser pelo menos de grau m para que, no limite, um valor constante em um ponto infinitesimal seja obtido. Na verdade, este é o primeiro requerimento de continuidade (1a) para uma integração não-trivial. Este requisito é também equivalente a uma condição de deformações constantes mostrada a seguir.

Completitude também demanda que todos os termos de ordem mais baixa estejam contidos no polinômio de aproximação. Isto está ligado à requisição que movimentos de corpo rígido (sem deformações) sejam possíveis dentro da formulação aproximada do método, como também é mostrado a seguir.

Estes dois critérios são automaticamente satisfeitos se os polinômios usados nas funções de aproximação dos elementos forem *completos* até o grau m . Portanto, assim são especificadas as condições de completitude:

2a. Modos de corpo rígido:

As funções de aproximação para os deslocamentos dentro de um elemento devem ser tais que não permitam que ocorra deformação do elemento quando os deslocamentos nodais estão associados a um deslocamento de corpo rígido.

Dito de outra forma, se todos os nós de um elemento forem submetidos aos mesmos valores da variável fundamental (deslocamento), então os gradientes (derivadas ou deformações) da variável fundamental devem ser nulas.

Um deslocamento de corpo rígido é o estado de deformação mais elementar que um elemento pode sofrer. Basicamente, esta condição impõe a existência de combinações de valores das coordenadas generalizadas que permitam todos os pontos do elemento sofrerem o mesmo deslocamento.

2b. Estados de deformação (generalizada) constante:

As funções de aproximação para deslocamentos têm que ter uma forma tal que se os deslocamentos nodais são compatíveis com um estado de deformação (generalizada) constante então este estado de deformação vai realmente ser obtido pela formulação. O modelo de aproximação em elementos finitos deve ser capaz de representar valores constantes para as derivadas da variável fundamental até a ordem m .

Esta condição impõe a existência de combinações de valores das coordenadas generalizadas que permitam todos os pontos do elemento sofrerem a mesma deformação. Deve existir uma dessas combinações para cada estado de deformação generalizada possível.

2c. Completude para melhor velocidade de convergência:

O modelo de elementos finitos deve ser completo em todos os estados de comportamento de ordem menor que a maior ordem representada. A omissão de termos intermediários vai interferir na velocidade de convergência, diminuindo a vantagem de modelos com polinômio de altos graus. A velocidade de convergência depende do polinômio *completo de mais alta ordem* dentro do modelo.

2d. Completude para isotropia geométrica:

O modelo de elementos finitos deve ser invariante com respeito da orientação dos elementos dentro do espaço (sistema global de coordenadas). Os termos do triângulo de Pascal do polinômio de aproximação devem estar balanceados.

<u>Triângulo de Pascal</u>						<u>Grau do polinômio, p</u>	<u>Número de termos, n</u>
			1			0 (constante)	1
		x		y		1 (linear)	3
	x ²		xy		y ²	2 (quadrático)	6
x ⁴	x ³	x ² y		xy ²		3 (cúbico)	10
		x ³ y	x ² y ²	xy ³	y ⁴	4 (quártico)	15

A necessidade dos dois primeiros requisitos pode ser entendida fisicamente se for imaginado uma subdivisão do corpo em elementos cada vez mais menores. A medida que estes elementos aproximam um tamanho infinitesimal, os deslocamentos e deformações em cada elemento tendem para valores constantes.

Quanto ao terceiro requisito, se a ordem do maior polinômio completo usado na aproximação por elementos finitos é $p \geq m$, a *ordem de convergência* pode ser obtida ao ser observar quão próximo este polinômio pode aproximar uma expansão local em séries de Taylor da função fundamental u . A ordem do erro de aproximação vai ser $O(h^{p+1})$, onde h é tamanho do elemento, porque somente os termos de ordem p podem ser representados corretamente.

A imposição da condição de isotropia geométrica pode ser entendida intuitivamente. O modelo deve ser independente da orientação do sistema de coordenadas local do elemento. A inclusão de qualquer termo do polinômio de interpolação de um lado do eixo de simetria do triângulo de Pascal deve vir acompanhada da inclusão do termo correspondente do outro lado.

3. Condições para aproximação assintótica

São três as condições necessárias para uma convergência assintótica de um modelo de elementos finitos. A primeira condição corresponde às condições de continuidade estabelecidas anteriormente e as outras correspondem às duas primeiras condições de completitude:

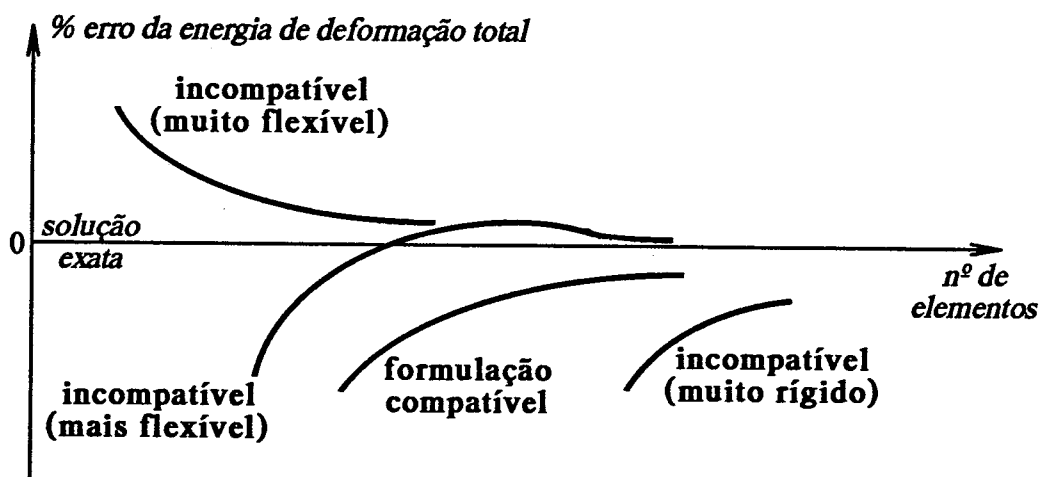
- 3a. Os modelos para deslocamentos devem ser contínuos dentro dos elementos, e os deslocamentos devem ser compatíveis entre elementos adjacentes. Em outras palavras, a compatibilidade de deslocamentos deve ser satisfeita em todos os pontos do domínio, exigindo a utilização de elementos *compatíveis* ou *conformes*.
- 3b. Os modelos para deslocamentos devem incluir os deslocamentos de corpo rígido do elemento.
- 3c. Os modelos para deslocamentos devem incluir todos os estados de deformação constante do elemento.

Sempre que as condições acima forem satisfeitas a formulação do método dos elementos finitos é válida. Na verdade, a primeira condição é uma imposição do método de Rayleigh-Ritz que exige funções de aproximação admissíveis (que satisfaçam compatibilidade) para que haja convergência (assintótica) do método.

Entretanto, existem casos em que, mesmo não satisfazendo as condições de compatibilidade entre elementos adjacentes, o método dos elementos finitos converge para a solução exata. Conforme dito anteriormente, a convergência pode ser alcançada quando não há contribuição para a energia potencial total da integração através das fronteiras dos elementos. O item 5. que se segue descreve um teste de convergência de modelos de elementos finitos.

Elementos finitos não-conformes podem fornecer bons resultados. No entanto, a desvantagem principal de elementos não compatíveis é que não se tem mais garantias quanto a uma convergência assintótica. Isto é, não se pode saber a priori que o modelo fornece um limite superior para a rigidez real do sistema. Por outro lado, formulações não-conformes são em geral menos rígidas que as formulações compatíveis, podendo uma formulação não-conforme em certos casos convergir mais rapidamente que uma conforme.

A figura abaixo considera o erro na avaliação da energia de deformação total de uma estrutura em função do número de elementos finitos utilizados para representá-la. Considera-se um sistema onde os deslocamentos prescritos são nulos e existem forças prescritas no contorno, de tal forma que a energia de deformação fica subestimada por uma formulação compatível. Pode-se notar que formulações incompatíveis não necessariamente aproximam assintoticamente a solução exata.



4. Seleção do grau do polinômio baseado no número de graus de liberdade

Além de satisfazer as condições de continuidade e completitude, a consideração final na seleção de polinômios para deslocamentos é que *o número total de coordenadas generalizadas de um elemento deve ser igual ou maior que o número de graus de liberdade do elemento*.

O procedimento usual utiliza o mesmo número de coordenadas generalizadas e graus de liberdade. É possível utilizar coordenadas generalizadas em excesso para melhorar a matriz de rigidez do elemento, isto é, para fazê-lo menos rígido (ou mais flexível). Estas coordenadas generalizadas a mais estão em geral associadas com nós internos ao elemento e melhoram a aproximação do equilíbrio dentro do elemento. Entretanto, elas não melhoram o equilíbrio entre elementos.

Desta forma, nós externos estão associados a graus de liberdade nodais e nós internos estão associados a graus de liberdade internos. Esta distinção não é feita na formulação individual dos elementos. Somente no processo de montagem do modelo global que a diferença torna-se importante. Por exemplo, logo antes da montagem, os termos de rigidez associados a graus de liberdade internos podem ser escritos em função dos graus de liberdade nodais (externos), usando um processo de condensação estática.

O número mínimo de graus de liberdade (ou coordenadas generalizadas) necessário para um dado elemento é determinado pelos requisitos de completitude para convergência, pelos requisitos de isotropia geométrica e a necessidade de uma representação adequada dos termos no funcional da energia potencial total.

Graus de liberdade adicionais, além do mínimo, podem ser incluídos adicionando-se nós externos ou internos, ou especificando-se também como graus de liberdade derivadas de maior ordem dos deslocamentos para os nós já contidos na formulação.

5. Teste de convergência de modelos de elementos finitos

O objetivo de um teste de convergência para modelos de elementos finitos é demonstrar que todos os termos contidos nas funções de aproximação até a ordem m (onde m é a derivada de mais alto grau que aparece no funcional) fornecem uma solução conforme (compatível), pelo menos a medida que a malha é refinada.

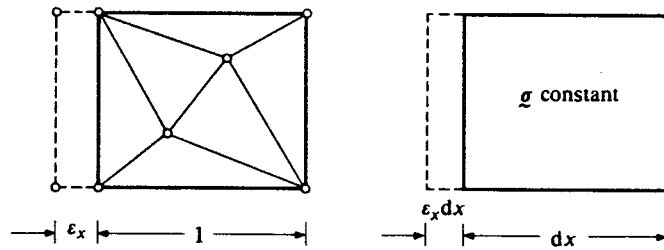
- A convergência de um modelo de elemento finitos pode, então, ser verificada da seguinte forma:
- (a) Quando um estado de deformação constante implica automaticamente em continuidade de deslocamentos.
 - (b) Quando os critérios 2a e 2b de completitude são satisfeitos, pelo menos no limite quando a malha é refinada infinitamente.

Para testar a convergência de um modelo de elementos finitos para qualquer configuração de malha é necessário que se imponha, em um arranjo arbitrário de elementos (compatíveis ou não), deslocamentos nodais correspondentes a um estado de deformação (generalizada) constante. Se isto resulta em equilíbrio para todos os nós da malha, sem que se aplique nenhum carregamento externo, então claramente nenhuma energia foi perdida através das interfaces entre elementos, mesmo quando a compatibilidade não é satisfeita ali. Este teste é chamado de "*Patch Test*" e fornece uma condição suficiente para convergência.

Este teste teria que ser satisfeito somente quando o tamanho dos elementos na configuração arbitrária se tornassem infinitamente pequenos. Neste caso, o modelo de elementos finitos pode representar o comportamento real do material e, no limite quando o tamanho dos elementos tende a zero, reproduziria exatamente o comportamento real da estrutura. O teste quando aplicado no limite é chamado de 'fraco' ("*Weak Patch Test*").

A maioria dos elementos finitos usuais, baseados em polinômios, satisfazem este teste para malhas com refinamento finito, com exceção de alguns elementos de placa ou casca que somente satisfazem o teste na sua forma fraca. Por este motivo, o teste tornou-se padrão para elementos de qualquer tamanho.

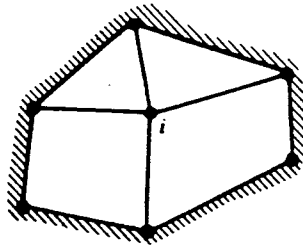
A figura abaixo mostra a interpretação física do “Patch Test” para um estado de deformação constante associado a um campo de deslocamentos lineares na direção x .



Este teste pode ser apresentado em três formas (Zienkiewicz, 89):

Teste A:

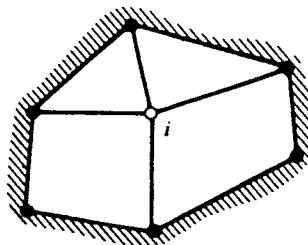
Impõe-se deslocamentos consistentes com um estado de deformação constante para todos os nós da malha e verifica-se o equilíbrio de nós internos, como mostrado abaixo:



Verifica-se $[K_{ij}]\{D_j\} = \{R_i\}$ para o nó i

Teste B:

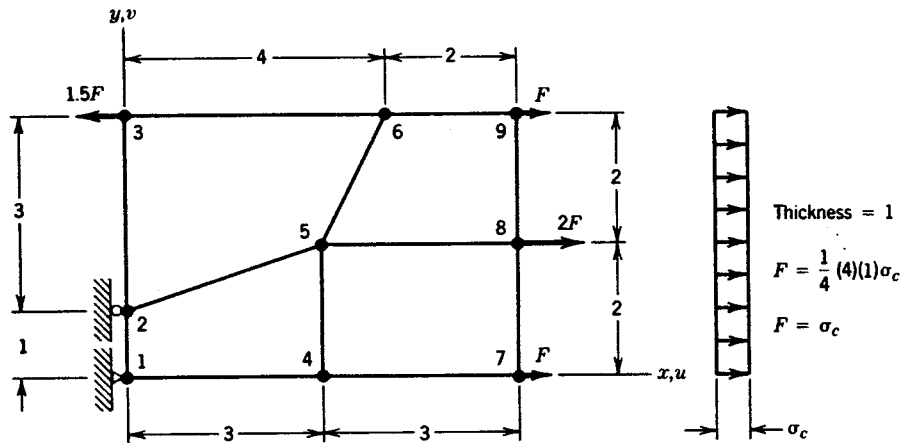
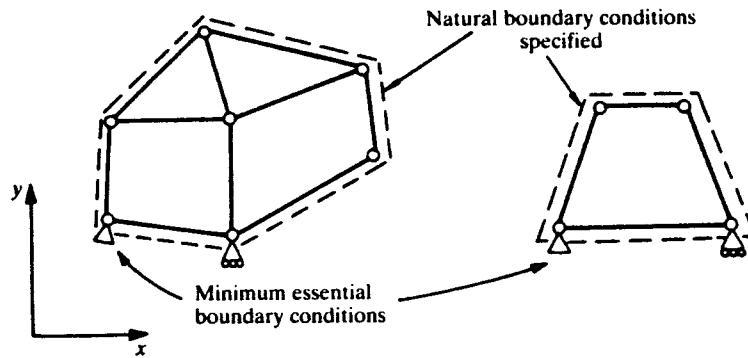
Impõe-se deslocamentos consistentes com um estado de deformação constante para os nós do contorno da malha e verifica-se os deslocamentos dos nós internos, como mostrado abaixo:



Verifica-se os deslocamentos $\{D_j\}$ do nó i

Teste C:

As condições de suporte do modelo são as mínimas essenciais para impedir movimentos de corpo rígido. Impõe-se cargas equivalentes nodais que são consistentes com forças de superfície que provocariam um estado de tensão constante, como mostrado a seguir. Verifica-se se as tensões calculadas nos elementos correspondem ao estado de tensão imposto.



O teste C é necessário e suficiente para garantir a convergência pois testa a aproximação quando condições de contorno naturais (forças de superfície) são especificadas e testa a estabilidade numérica do modelo de elementos finitos. Qualquer singularidade da matriz de rigidez global vai ser observada, visto que as condições de contorno são as mínimas essenciais.

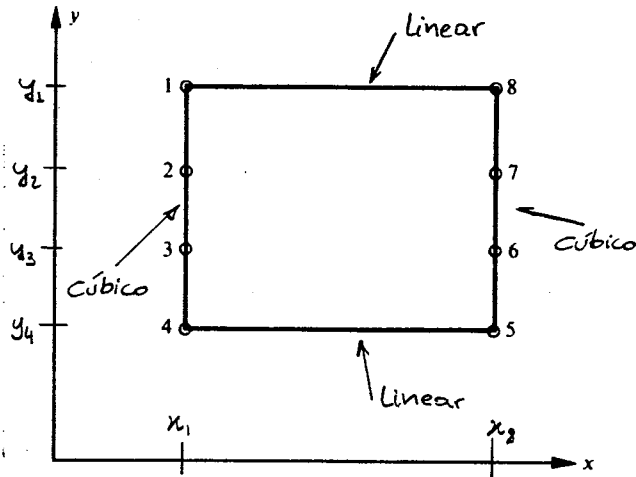
Referências

- Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Terceira Edição, John Wiley & Sons, 1989.
- Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., *The Finite Element Method - Volume 1 Basic Formulation and Linear Problems*, Quarta Edição, McGraw-Hill, 1989.
- Desai, C.S., e Abel, J.F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand-Reinhold, 1972.
- Notas de aula do Prof. J. F. Abel do curso *Finite Element Method*, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY, 1985.

Elementos Finitos Planos de Continuidade C^0

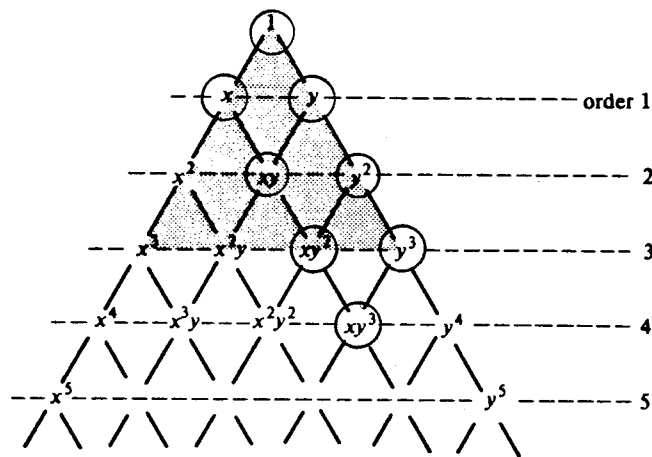
• Elementos retangulares

- Motivação



8 nós \Rightarrow 8 termos no polinômio (no mínimo)

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 xy^2 + a_7 y^3 + a_8 xy^3$$



Triângulo de Pascal mostrando os termos de um polinômio completo do 3º grau e os termos considerados na interpolação do elemento acima. Vê-se que o único polinômio completo é o linear $u = a_1 + a_2 x + a_3 y$.

Se for adotado: $N_{I1}(x) = \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)}$ $N_{I8}(x) = \frac{(x_1 - x)}{(x_1 - x_2)}$

$$N_{J1}(y) = \frac{(y_2 - y)(y_3 - y)(y_4 - y)}{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_4 - y_1)}$$

$$N_{J2}(y) = \frac{(y_1 - y)(y_3 - y)(y_4 - y)}{(y_1 - y_2)(y_3 - y_2)(y_4 - y_2)}$$

$$N_{J3}(y) = \frac{(y_1 - y)(y_2 - y)(y_4 - y)}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)(y_4 - y_3)}$$

$$N_{J4}(y) = \frac{(y_1 - y)(y_2 - y)(y_3 - y)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)}$$

$$N_1(x, y) = N_{I1}(x) \cdot N_{J1}(y)$$

$$N_2(x, y) = N_{I1}(x) \cdot N_{J2}(y)$$

$$N_3(x, y) = N_{I1}(x) \cdot N_{J3}(y)$$

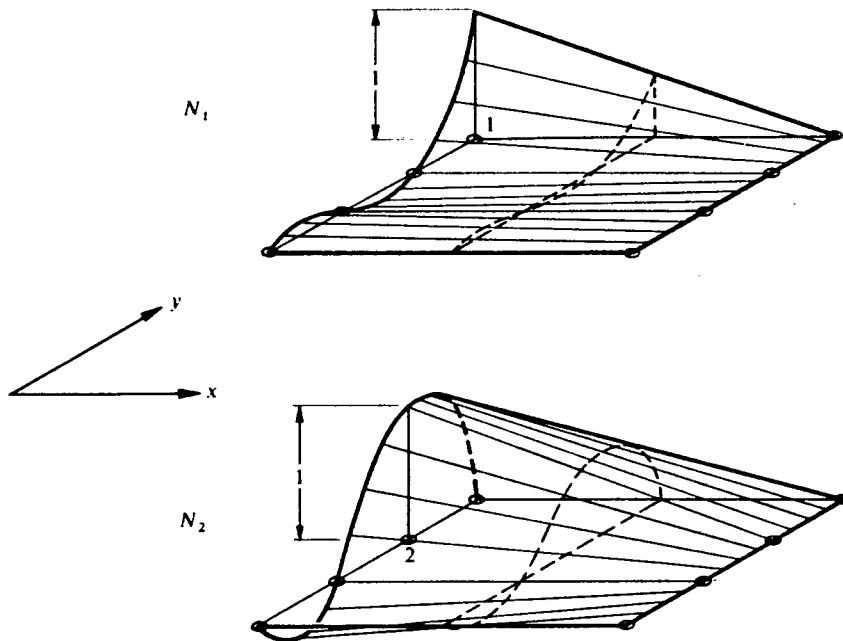
$$N_4(x, y) = N_{I1}(x) \cdot N_{J4}(y)$$

$$N_8(x, y) = N_{I8}(x) \cdot N_{J1}(y)$$

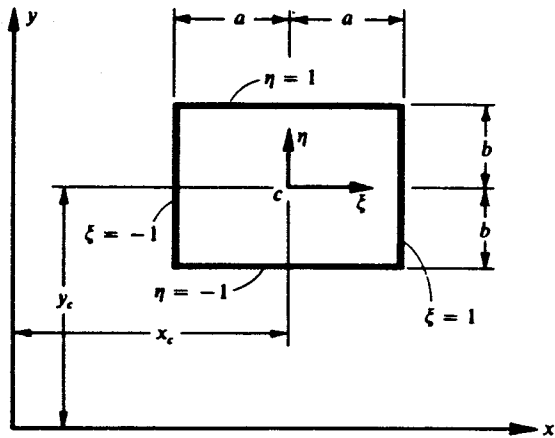
$$N_7(x, y) = N_{I8}(x) \cdot N_{J2}(y)$$

$$N_6(x, y) = N_{I8}(x) \cdot N_{J3}(y)$$

$$N_5(x, y) = N_{I8}(x) \cdot N_{J4}(y)$$



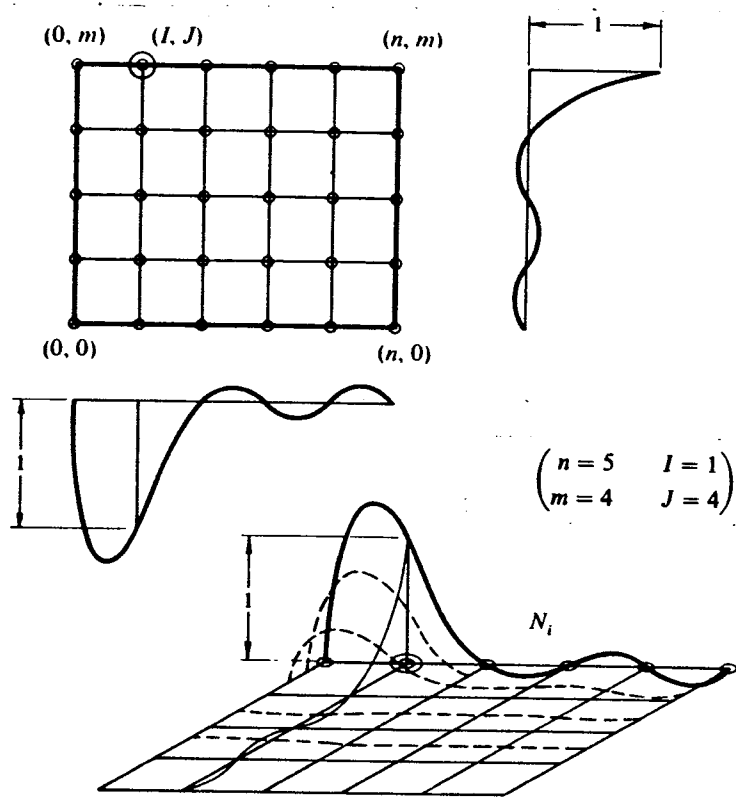
— Normalizações de coordenadas



$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \quad d\xi = \frac{dx}{a}$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{b} \quad d\eta = \frac{dy}{b}$$

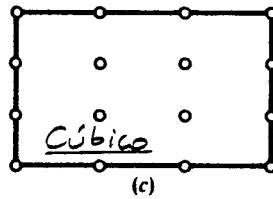
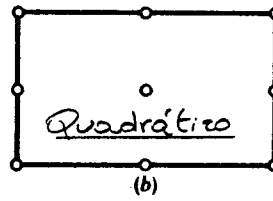
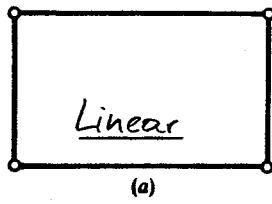
— Família Lagrangeana



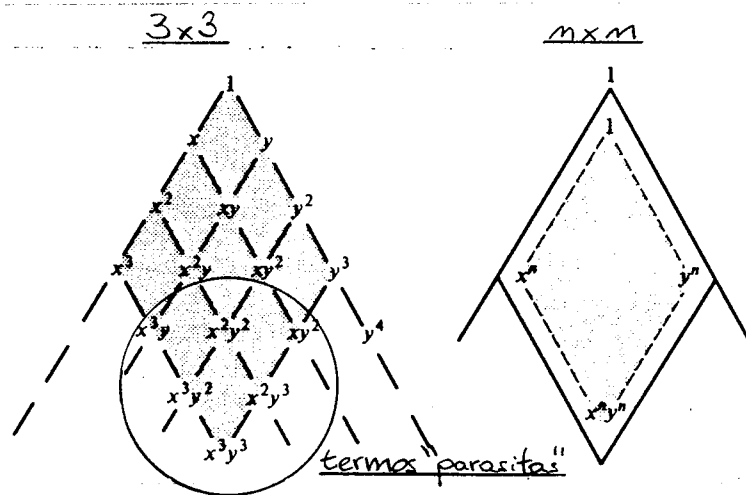
$$\begin{pmatrix} n = 5 & I = 1 \\ m = 4 & J = 4 \end{pmatrix}$$

$$l_k^m(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \cdots (\xi_k - \xi_n)}$$

$$N_i \equiv N_{IJ} = l_i^m(\xi) l_j^n(\eta)$$



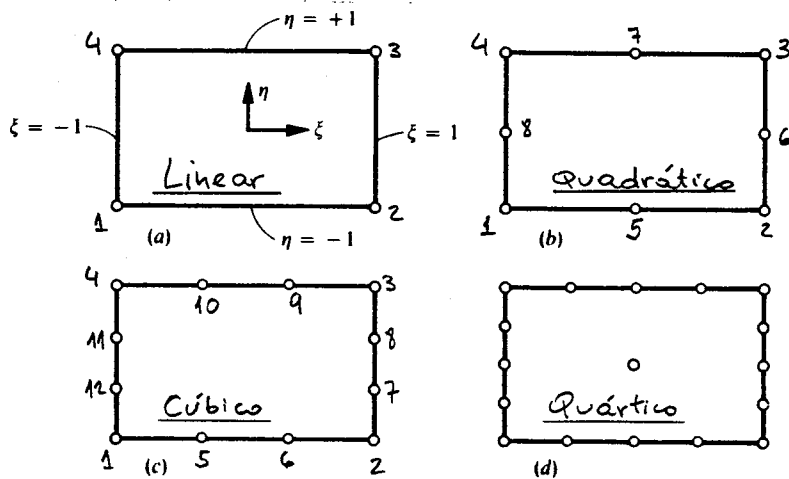
Termos do triângulo de Pascal resultantes de uma expansão Lagrangeana.



Vê-se que há um excessivo número de termos além do polinômio completo de mais alto grau pertencente à formulação.

Lembre-se que a velocidade de convergência depende do polinômio completo de mais alto grau.

- Família "Serendipity"



Idéia:

Para evitar os termos "parasitas" do triângulo de Pascal, ainda garantindo continuidade com polinômios de qualquer grau no contorno do elemento, procura-se posicionar os nós o máximo possível somente no contorno do elemento.

Elemento Linear

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \right\}$$

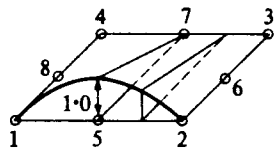
$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)$$

N_i	ξ_i	η_i
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

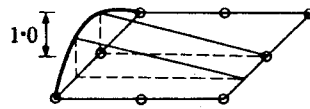
Este elemento também pertence à família Lagrangeana.

As funções de forma dos outros elementos da família Serendipity são construídas de uma maneira sistemática, que foi descoberta por acaso (daí a denominação Serendipity).

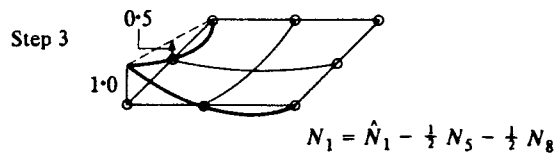
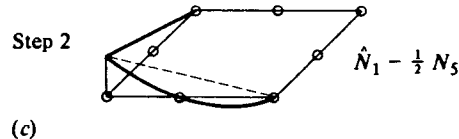
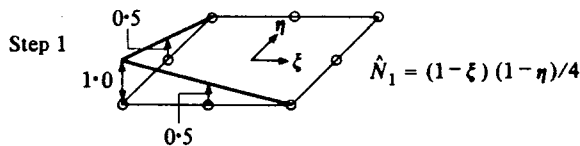
Quadrático



$$(a) N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta)$$



$$(b) N_8 = \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2)$$



Nós dos cantos:
($i = 1, 2, 3, 4$)

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1)$$

Nós dos meios dos lados:
($i = 5, 6, 7, 8$)

$$\xi_i = 0$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i)$$

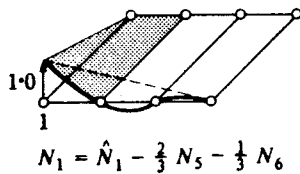
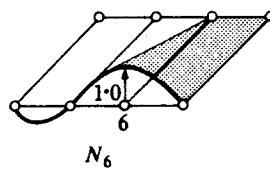
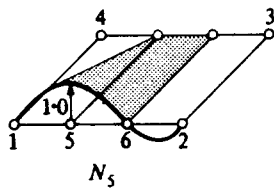
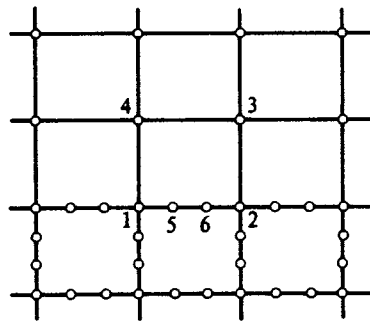
$$\eta_i = 0$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2)$$

SHAPE FUNCTIONS FOR THE PLANE QUADRATIC ISOPARAMETRIC ELEMENT, WRITTEN IN A FORM THAT PERMITS A VARIABLE NUMBER OF NODES

N_i	4 Linear Edges	3, 2, 1, or 0 Linear Edges, Others Quadratic			
	Include Nodes 1 to 4	Add Node 5	Add Node 6	Add Node 7	Add Node 8
N_1	$(1 - \xi)(1 - \eta)/4$	$-N_5/2$			$-N_8/2$
N_2	$(1 + \xi)(1 - \eta)/4$	$-N_5/2$	$-N_6/2$		
N_3	$(1 + \xi)(1 + \eta)/4$		$-N_6/2$	$-N_7/2$	
N_4	$(1 - \xi)(1 + \eta)/4$			$-N_7/2$	$-N_8/2$
N_5		$(1 - \xi^2)(1 - \eta)/2$			
N_6			$(1 + \xi)(1 - \eta^2)/2$		
N_7				$(1 - \xi^2)(1 + \eta)/2$	
N_8					$(1 - \xi)(1 - \eta^2)/2$

Cúbico



Nós dos cantos:
($i=1, 2, 3, 4$)

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (-10 + 9\xi^2 + 9\eta^2)$$

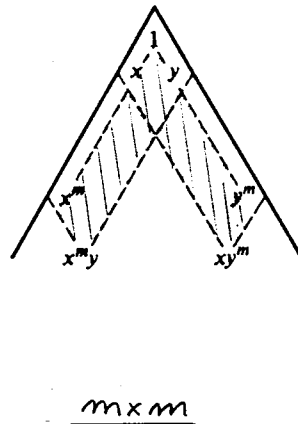
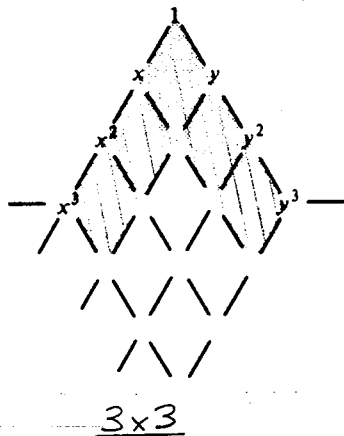
Nós do meio dos lados $\xi = \pm 1$
($i=7, 8, 11, 12$) $\left(\eta_i = \pm \frac{1}{3}\right)$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \xi \xi_i) (1 + 9\eta \eta_i) (1 - \eta^2)$$

Nós do meio dos lados $\eta = \pm 1$
($i=5, 6, 9, 10$) $\left(\xi_i = \pm \frac{1}{3}\right)$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + 9\xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi^2)$$

Termos do triângulo de Pascal decorrentes das funções de forma de bordo dos elementos do tipo "Serendipity".



$n = n^\circ$ de termos gerados

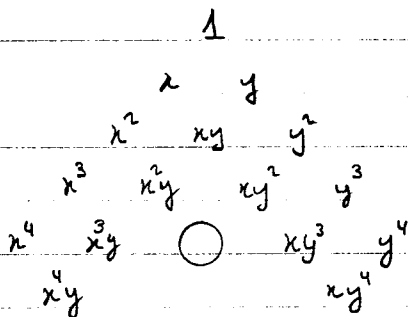
$$n = (m+1) \times 4 - 4$$

$$m=1 \Rightarrow n=4$$

$$m=2 \Rightarrow n=8$$

$$m=3 \Rightarrow n=12$$

Quártico ($m=4$)

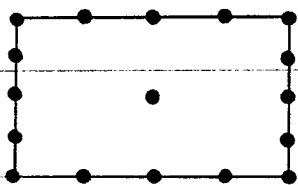


$$m=4 \Rightarrow n=16$$



são necessários 16 nós no contorno do elemento.

Com mais um nó interior, tem-se um total de 17 nós.

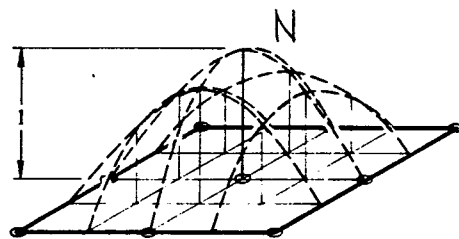


Para que se tenha um polinômio completo do quarto grau, é necessário que o termo x^2y^2 seja também considerado.

Isto é conseguido adicionando-se um nó interior cuja função de forma é:

$$N = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

que é nula em todos os bordos do elemento.



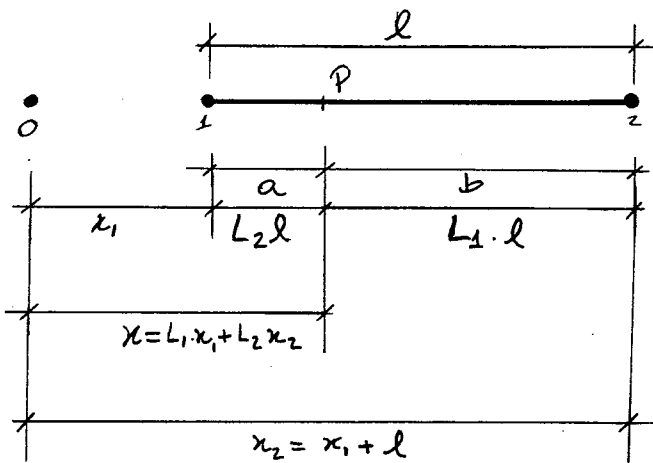
• Elementos triangulares

— Coordenadas naturais para triângulos

Vantagem:

- independem do sistema de coordenadas
- tratamento natural para triângulos e tetraedros (simetria triangular)

— Cas unidimensional (L_1, L_2)



$$a + b = l$$

$$L_1 = \frac{b}{l}$$

$$L_2 = \frac{a}{l}$$

$$L_1 + L_2 = 1$$

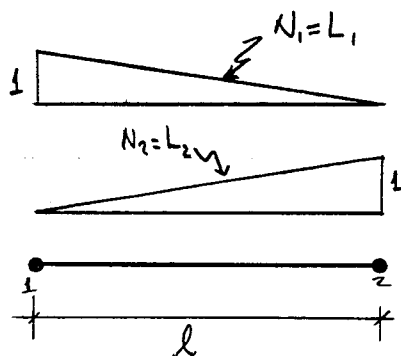
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix}$$

Interpolação linear:

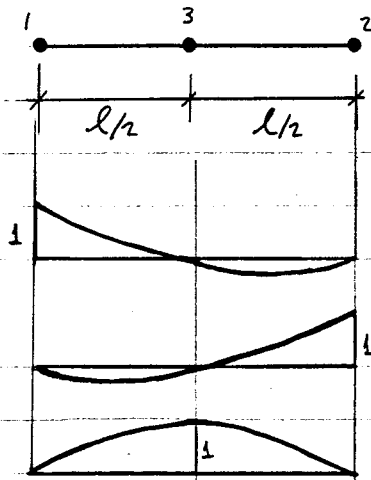
$$N_1 = L_1$$

$$N_2 = L_2$$

$$\phi = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$



Interpolação quadrática:



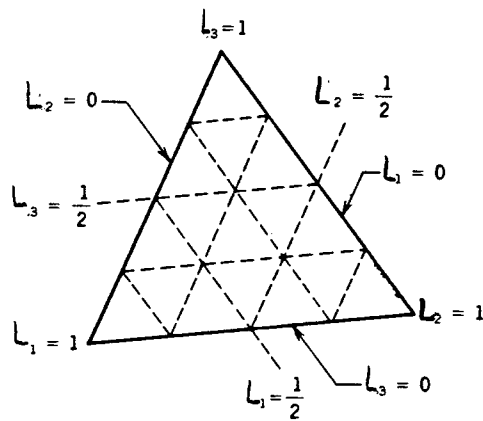
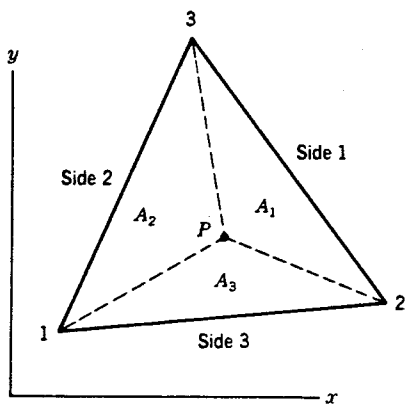
$$N_1 = L_1(2L_1 - 1) \quad \text{ou} \quad N_1 = L_1 - N_3/2$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1) \quad \text{ou} \quad N_2 = L_2 - N_3/2$$

$$N_3 = 4L_1L_2$$

$$\phi = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

- Caso bidimensional: Coordenadas de área (L_1, L_2, L_3)
(coordenadas baricêntricas)



$$L_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A}$$

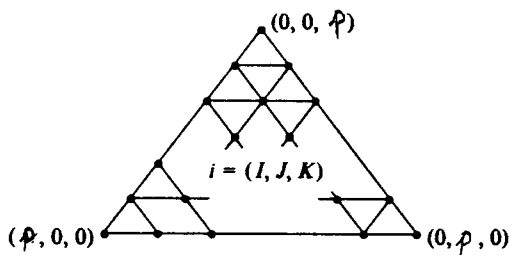
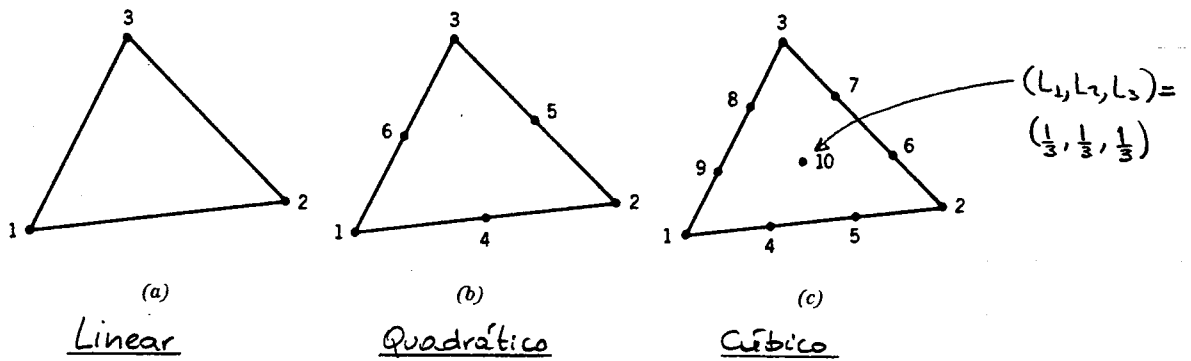
$$L_3 = \frac{A_3}{A}$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = A$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) \\ (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) \\ (x_1 y_2 - x_2 y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

Os elementos triangulares pertencem à família Lagrangeana:



$$N_i = I_i(L_1) J_i(L_2) K_i(L_3)$$

interpolação lagrangeana em L_1, L_2, L_3

$$I + J + K = p$$

$p \rightarrow$ grau do polinômio de interpolação

Interpolação linear ($p=1$):

$$N_1 = L_1$$

$$N_2 = L_2$$

$$N_3 = L_3$$

$$\Phi = [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

Interpolação quadrática:

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1)$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

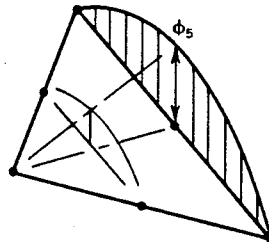
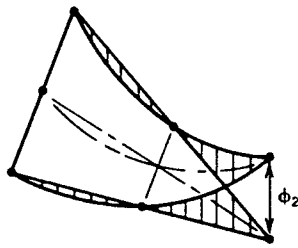
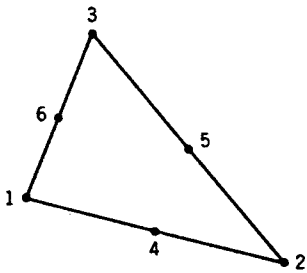
$$N_2 = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_5 = 4L_2L_3$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_6 = 4L_3L_1$$

$$\phi = \sum_{i=1}^6 N_i \phi_i$$



Interpolação cúbica:

$$N_1 = \frac{1}{2} L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2)$$

$$N_4 = \frac{9}{2} L_2 L_1(3L_1 - 1)$$

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2(3L_2 - 1)$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_3 L_2(3L_2 - 1)$$

$$N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3(3L_3 - 1)$$

$$N_8 = \frac{9}{2} L_1 L_3(3L_3 - 1)$$

$$N_9 = \frac{9}{2} L_3 L_1(3L_1 - 1)$$

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3$$

Formulação Isoparamétrica

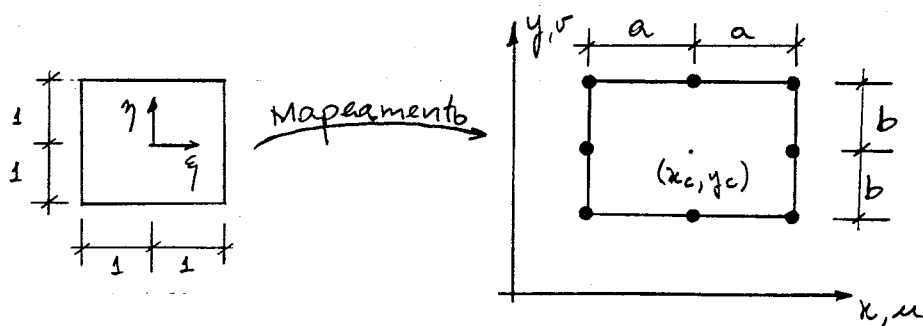
- Objetivo principal

Criar elementos quadriláteros não retangulares e elementos com arestas curvas.

- Motivação

Até agora a geometria (coordenadas dos pontos) de um elemento quadrilátero era definida diretamente em relação aos eixos cartesianos. Desta forma, somente elementos retangulares, paralelos os eixos, foram considerados. No caso de um elemento triangular, a formulação permitia uma orientação qualquer do elemento, mas sempre mantendo os lados retos.

Também foi considerada uma mudança de coordenadas para interpolar deslocamentos no interior do elemento em função de deslocamentos nodais.



As funções de forma, escritas em termos de coordenadas normalizadas ou paramétricas (ξ, η) , interpolam os deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N(\xi, \eta)] \{d\}$$

Dentro da formulação do método dos elementos finitos, a expressão para a matriz de rigidez do elemento

$$[R] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$$

envolve derivadas das funções de interpolação em relação às coordenadas cartesianas (x, y) (isto aparece em $[B]$).

Para efetuar esta integração é necessário considerar a mudança de coordenadas de (x, y) para (ξ, η) ou vice-versa, dependendo dos limites de integração utilizados (se em coordenadas cartesianas ou em paramétricas).

Implicito dentro destas considerações está o mapeamento retangular (não distorcido) entre a geometria do elemento no espaço paramétrico (ξ, η) e no espaço cartesiano (x, y) :

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{b}$$

Em outras palavras, enquanto os deslocamentos do modelo podem ter uma variação geral (com um polinômio de qualquer ordem), a geometria do elemento quadrilátero (isto é, as coordenadas de seus pontos interiores) tem um mapeamento linear e retangular (mostrado acima) em relação às coordenadas dos seus cantos $(x_c \pm a, y_c \pm b)$.

De maneira análoga, a geometria de um elemento triangular fica completamente definida em função dos nós dos cantos, não dependendo das coordenadas dos outros nós (pontos de interpolação para deslocamentos) que este elemento possa ter:

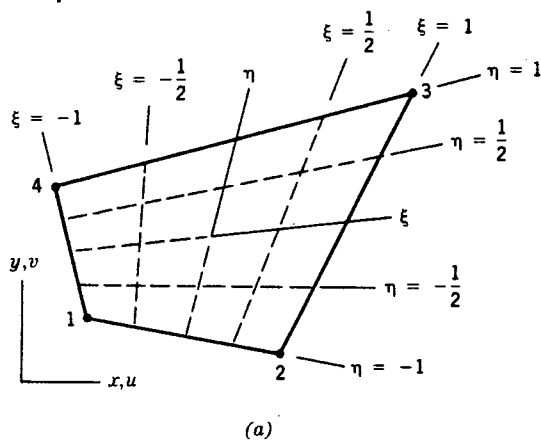
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

Neste caso, para a obtenção da matriz $[k]$, deve-se considerar a mudança de coordenadas entre (L_1, L_2, L_3) e (x, y) , pois a matriz $[B]$ envolve derivadas em relação a (x, y) mas é descrita em função de $[L_1, L_2, L_3]$.

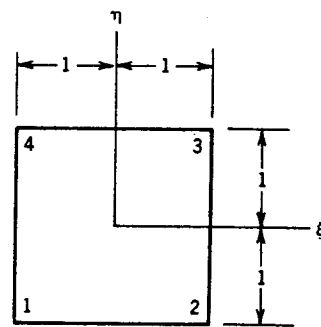
A ideia principal da formulação isoparamétrica está em interpolar a geometria do elemento (coordenadas de seus pontos) em função de coordenadas nodais, da mesma forma (daí o prefixo "iso") que os deslocamentos são interpolados.

• Exemplos de interpolação isoparamétrica

Mapeamento bi-linear

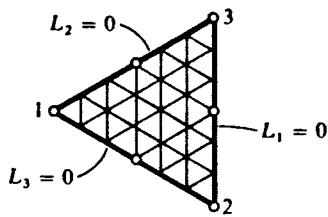
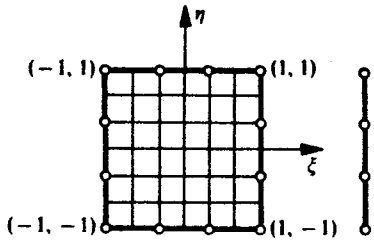


Espaço cartesiano



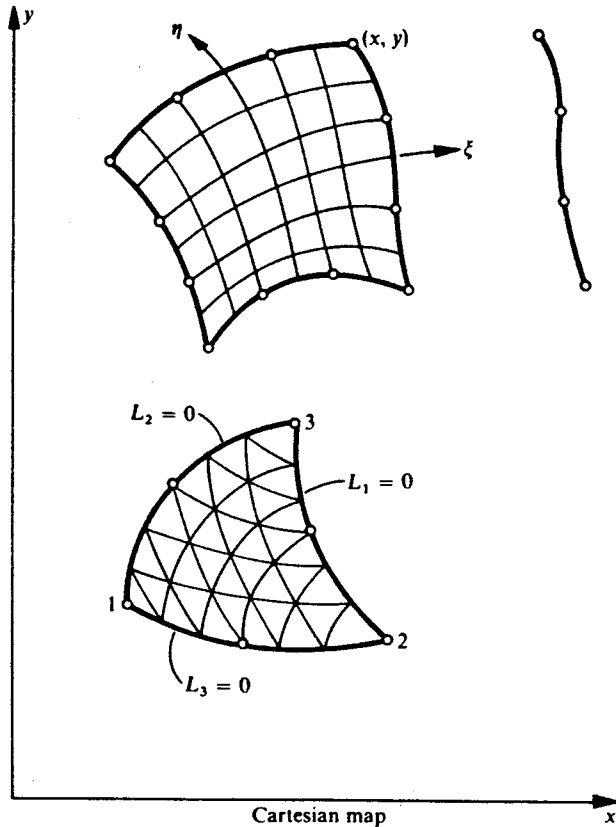
Espaço paramétrico

Mapeamento quadrilátero Serendipity cúbico



Local coordinates

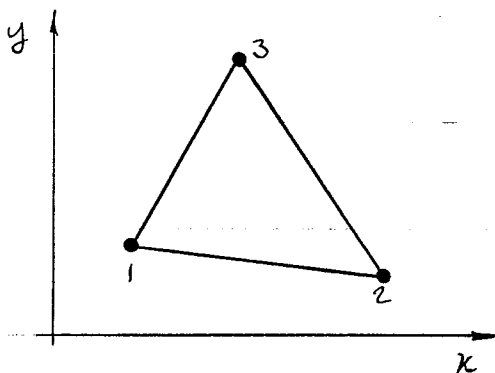
Mapeamento triangular quadrático



Cartesian map

- Formulações Subparamétrica, Isoparamétrica e Superparamétrica

Seja $\{c\}$ o vetor das coordenadas nodais de um elemento. Exemplo:



$$\{c\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

Defina a interpolação das coordenadas dos pontos do elemento por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [M] \{c\}$$

onde $[M]$ é uma matriz de mapeamento análoga à matriz das funções de forma $[N]$, só que ao invés de interpolar deslocamentos, como em

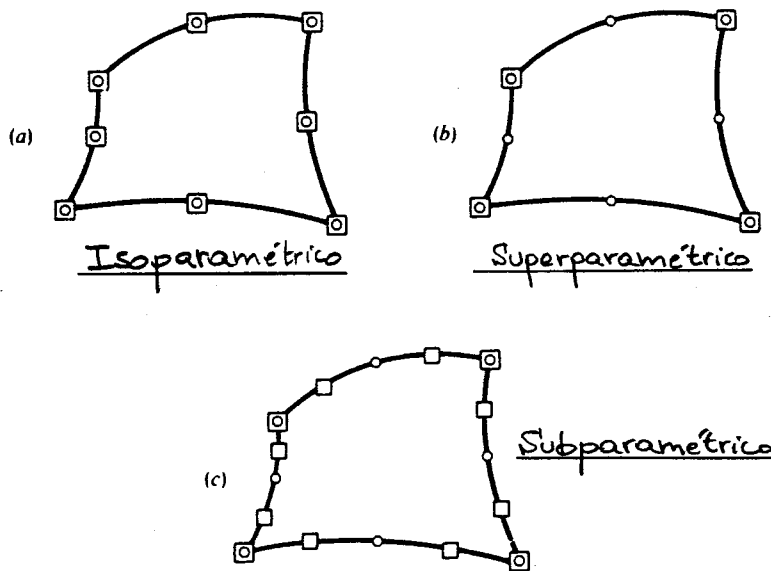
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{d\},$$

$[M]$ interpola coordenadas.

A interpolação é dita subparamétrica quando o grau das funções de $[N]$ é maior do que em $[M]$. Neste caso o número de nós do elemento que são utilizados para interpolar as coordenadas cartesianas é menor do que o número de nós utilizados para interpolar deslocamentos.

A interpolação é dita isoparamétrica quando as matrizes $[M]$ e $[N]$ são iguais. Neste caso os mesmos pontos nodais são utilizados para interpolar tanto posição quanto deslocamentos.

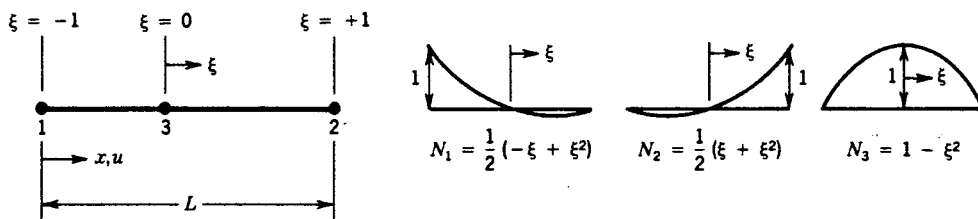
A interpolação é dita superparamétrica quando o grau de $[N]$ é menor do grau de $[M]$. Neste caso um menor número de nós é utilizado para interpolar deslocamentos do que é para interpolar coordenadas.



○ - pontos onde coordenadas são especificadas

□ - pontos onde deslocamentos são especificados

• Elemento unidimensional, isoparamétrico, quadrático e C^0



$$x = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad u = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Deformação:
$$E_x = \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_3}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

ou
$$E_x = [B] \{d\}$$

Neste caso, como $[N]$ depende de ξ , a regra da cadeia tem que ser utilizada para fazer a diferenciação:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi}.$$

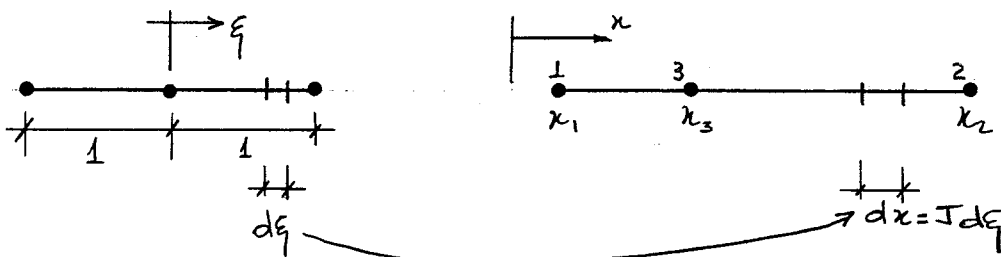
A derivada $d\xi/dx$ é calculada a partir da sua inversa. Utilizando a interpolação isoparamétrica para a coordenada cartesiana x ao longo do elemento tem-se:

$$\frac{dx}{d\xi} = \left[\frac{dN_1}{d\xi} \quad \frac{dN_2}{d\xi} \quad \frac{dN_3}{d\xi} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Esta derivada da coordenada de posição em função da coordenada paramétrica é chamada de Jacobiano

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} [N] \{c\}.$$

J é um fator de escala do mapeamento que leva do espaço paramétrico para o espaço cartesiano.



$$J = \frac{d}{d\xi} [N] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+2\xi) & \frac{1}{2}(1+2\xi) & (-2\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

No caso da deformação ϵ_x , tem-se:

$$\epsilon_x = [B] \{d\}, \text{ onde } [B] = \frac{d}{dx} [N] = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} [N] = \frac{1}{J} \frac{d}{d\xi} [N]$$

$$[B] = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+2\xi) & \frac{1}{2}(1+2\xi) & (-2\xi) \end{bmatrix}$$

Integração: matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez do elemento é dada por:

$$[K] = \int_{x_1}^{x_2} [B]^T EA [B] dx$$

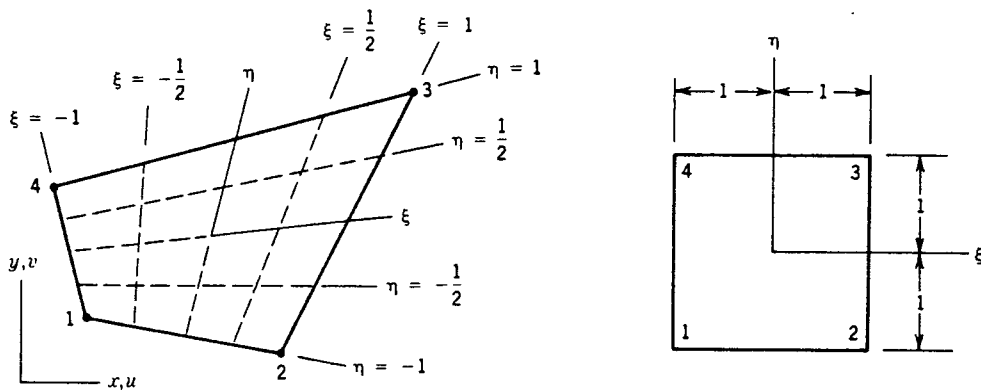
De uma forma geral, a integração com a mudança de variável pode ser feita como mostrado abaixo:

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x) dx = \int_{\xi(x_1)}^{\xi(x_2)} \phi(x(\xi)) \frac{dx}{d\xi} d\xi = \int_{-1}^{+1} \phi(x(\xi)) J d\xi$$

Assim,

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{J} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+2\xi) \\ \frac{1}{2}(1+2\xi) \\ (-2\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+2\xi) & \frac{1}{2}(1+2\xi) & (-2\xi) \end{bmatrix} d\xi$$

• Mapeamento isoparamétrico bi-linear



Neste caso,

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)$$

Diferenciação e Jacobiano

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

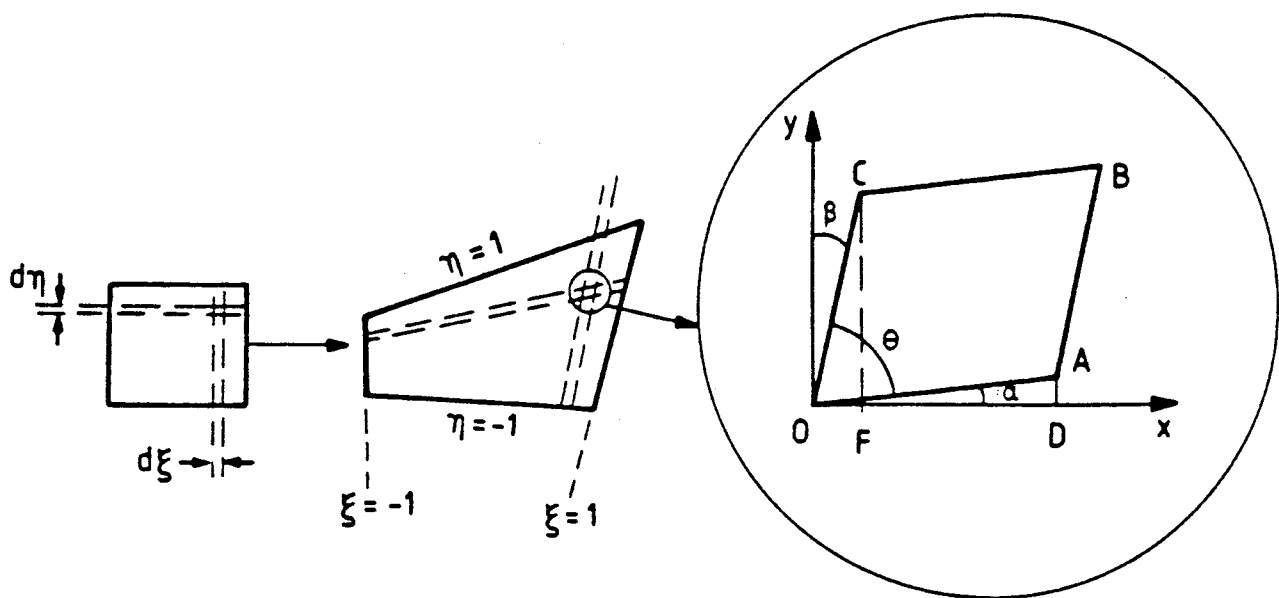
Onde $[J]$ é matriz do Jacobiano. Invertendo-se tem-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Onde $|J|$ é o determinante do Jacobiano:

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$|J|$ é um fator de escala de área para o mapeamento que leva do espaço paramétrico para o espaço cartesiano.



Neste caso o retângulo infinitesimal " $d\xi d\eta$ " é mapeado para o paralelogramo infinitesimal "OABC".

Tem-se que: $OD = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi$, $CF = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$,

$AD = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi$ e $OF = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta$

A área do paralelogramo "OABC" é a área " $d\xi d\eta$ " multiplicada por $|J|$:

$$\begin{aligned} OABC &= 2(OAC) \\ &= OA(OC \operatorname{sen} \theta) \\ &= OA \cdot OC \cdot \cos(90^\circ - \theta) \\ &= OA \cdot OC \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OABC &= OA \cdot OC (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) \\ &= OA \cos \alpha \cdot OC \cos \beta - OA \operatorname{sen} \alpha \cdot OC \operatorname{sen} \beta \\ &= OD \cdot CF - AD \cdot OF \end{aligned}$$

$$\therefore OABC = |J| d\xi d\eta$$

Em um elemento isoparamétrico bi-linear o Jacobiano pode ser obtido como mostrado abaixo.

Usando as relações $x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$ e $y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$, tem-se:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i$$

Ou ainda,

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix}$$

E o determinante do Jacobiano é:

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{Isto resulta em}$$

$$|J| = \frac{1}{8} \left\{ [(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)] + \right. \\ \left. [(x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)] \cdot \xi + \right. \\ \left. [(x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3)] \cdot \eta \right\}$$

Observe que um paralelogramo tem $|J| = \text{const.}$ em todas as pontas.

Deformações de um ponto no elemento

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{u\} = [N] \{d\}}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{E\} = [D] \{u\}}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{E\} = [B] \{d\}}$$

onde,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}}$$

Integração: matriz de rigidez do elemento

$$[k] = \iint [B]^T [E] [B] t dx dy$$

$$[B] = [B(x, y)]$$

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] t |J| d\xi d\eta$$

$$[B] = [B(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))]$$

• Integração numérica: Quadratura de Gauss

A integração analítica para a obtenção da matriz de rigidez do elemento é impraticável no caso geral. Em elementos finitos em geral utiliza-se a integração numérica de Gauss.

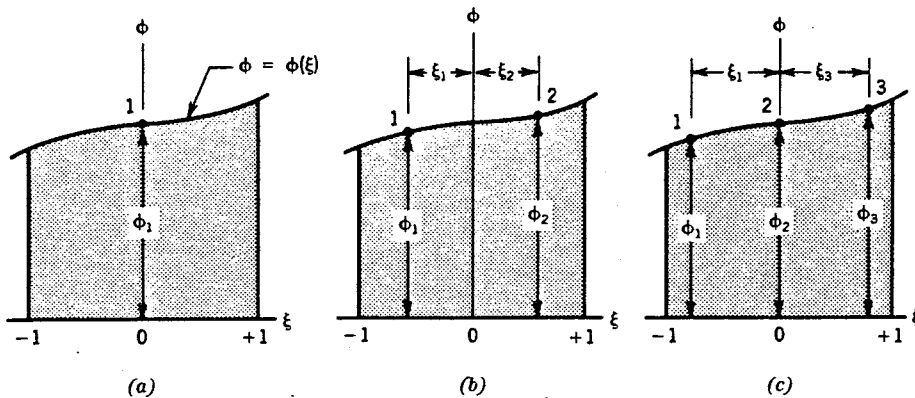
Uma dimensão

"Um polinômio de grau $2n-1$ é integrado exatamente por uma quadratura de Gauss com n pontos"

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i \phi_i = W_1 \phi_1 + W_2 \phi_2 + \dots + W_n \phi_n$$

No caso mais geral a integração tem um caráter aproximado:

$$I = \int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^n W_i \phi_i$$



$n=1$
1 ponto de amostragem

$n=2$
2 pontos

$n=3$
3 pontos

SAMPLING POINTS AND WEIGHTS FOR GAUSS QUADRATURE OVER THE INTERVAL $\xi = -1$ TO $\xi = +1$.

Order n	Location ξ_i of Sampling Point	Weight Factor W_i
1	0.	2.
2	$\pm 0.57735\ 02691\ 89626 = \pm 1/\sqrt{3}$	1.
3	$\pm 0.77459\ 66692\ 41483 = \pm \sqrt{0.6}$	$0.55555\ 55555\ 55555 = \frac{5}{9}$
	0.	$0.88888\ 88888\ 88888 = \frac{8}{9}$
4	$\pm 0.86113\ 63115\ 94053 = \pm \left[\frac{3 + 2r}{7} \right]^{1/2}$	$0.34785\ 48451\ 37454 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6r}$
	$\pm 0.33998\ 10435\ 84856 = \pm \left[\frac{3 - 2r}{7} \right]^{1/2}$	$0.65214\ 51548\ 62546 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6r}$
	where $r = \sqrt{1.2}$	

A integração de Gauss é aproximada quando $\phi(\xi)$ não é um polinômio. Porém, quantos mais pontos de amostragem forem utilizados, mais precisa vai ser a integração numérica.

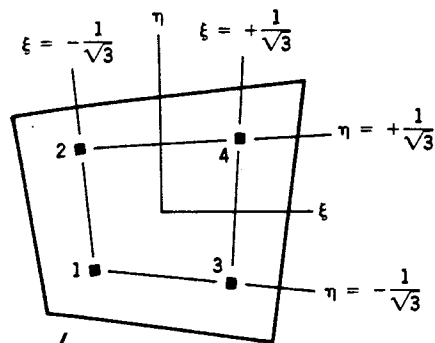
Os pontos de amostragem são também chamados de pontos de Gauss.

Duas dimensões

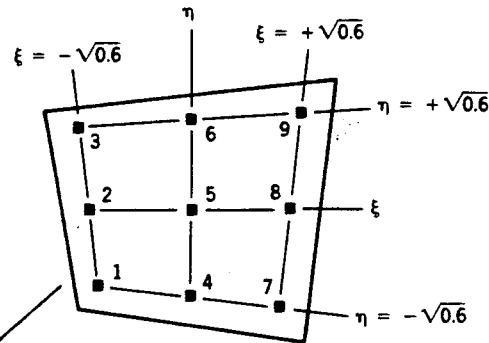
$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^m w_i \phi(\xi_i, \eta) \right] d\eta$$

$$\cong \sum_{j=1}^m w_j \left[\sum_{i=1}^m w_i \phi(\xi_i, \eta_j) \right]$$

$$\therefore I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j \phi(\xi_i, \eta_j)$$



$$I \approx \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$$



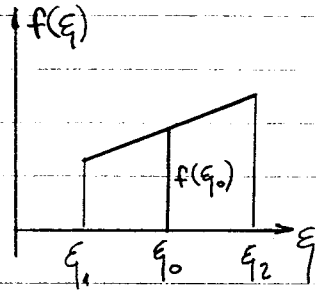
$$I \approx \frac{25}{81} (\phi_1 + \phi_3 + \phi_7 + \phi_9) + \frac{40}{81} (\phi_2 + \phi_4 + \phi_6 + \phi_8) + \frac{64}{81} \phi_5$$

Mais tarde será visto qual a ordem de quadratura ($m \times n$) que é adequada para diversos elementos.

Também será visto que alguns elementos fornecem melhores resultados com uma ordem reduzida, isto é, utilizando-se menos pontos de Gauss do que seria adequado.

• Um pouco mais sobre integração de Gauss

função linear $\rightarrow 2m-1=1 \Rightarrow m=1$



$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) d\xi = \underbrace{(\xi_2 - \xi_1)}_{\text{altura}} \underbrace{f(\xi_0)}_{\text{base média}} = W_1 f(\xi_0)$$

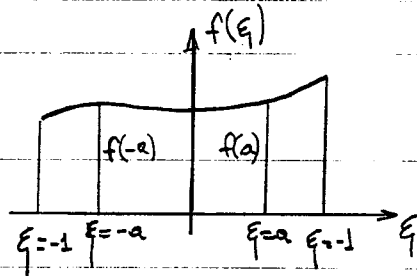
área do trapézio

$$\left. \begin{matrix} \xi_1 = -1 \\ \xi_2 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{W_1 = 2}, \quad \boxed{\xi_0 = 0}$$

função cúbica $\rightarrow 2m-1=3 \Rightarrow m=2$

$$f(\xi) = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3$$

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$$



$$I_{\text{exata}} = 2C_0 + \frac{2C_2}{3} \quad (\text{independe de } C_1 \text{ e } C_3)$$

Note que não há diferença entre quadrático e cúbico. Isto porque ξ^3 é uma função ímpar e $\int_{-1}^1 \xi^3 d\xi = 0$.

Escolha dois pontos de amostra simétricos com mesmo peso:

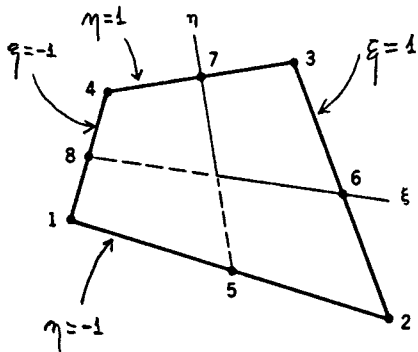
$$I = W f(-a) + W f(a) = 2W (C_0 + C_2 a^2)$$

Em que condições $I = I_{\text{exata}}$?

$$e = I - I_{\text{exata}} \quad e_{\text{min}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial C_0} = 0 \Rightarrow 2 - 2W = 0 \Rightarrow \boxed{W = 1} \\ \frac{\partial e}{\partial C_2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} - 2W a^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}} \end{cases}$$

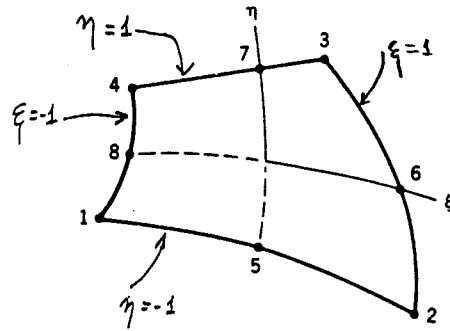
↑
erro

• Elementos isoparamétricos quadráticos com quatro lados



(a)

Lados retos e nós nos meios dos lados

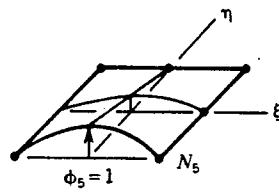


(b)

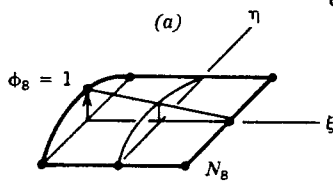
Lados curvos e nós fora dos meios dos lados

Elemento "Serendipity" - Q8

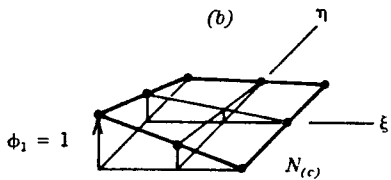
Funções de forma no espaço paramétrico (ξ, η)



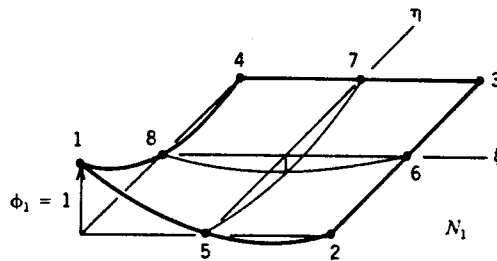
(a)



(b)



(c)



(d)

(a) $N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$

(b) $N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$

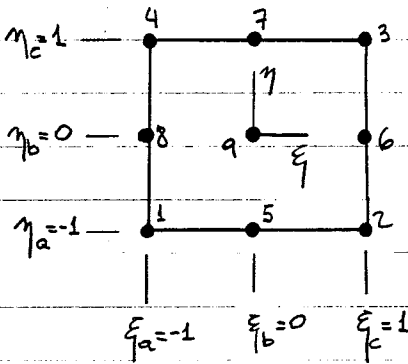
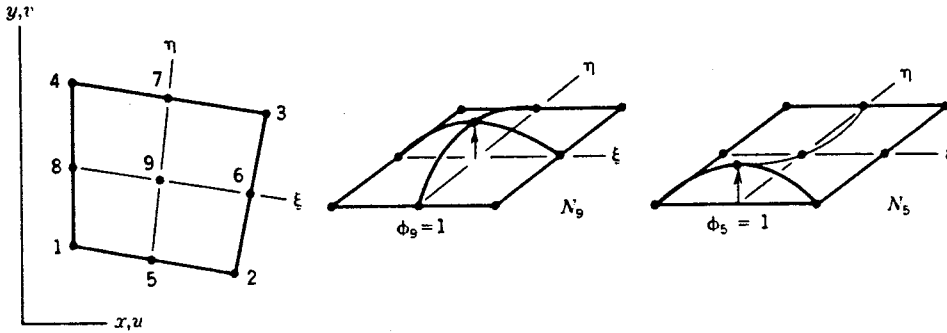
(c) $N_{(c)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$

(d) $N_1 = N_{(c)} - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8$

$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_8)$	$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$
$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6)$	$N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$
$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7)$	$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$
$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}(N_7 + N_8)$	$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$

Elemento Lagrangeano - Q9

Funções de forma no espaço paramétrico (ξ, η)



$$N_{a\xi} = \frac{(\xi - \xi_b)(\xi - \xi_c)}{(\xi_a - \xi_b)(\xi_a - \xi_c)}$$

$$N_{a\eta} = \frac{(\eta - \eta_b)(\eta - \eta_c)}{(\eta_a - \eta_b)(\eta_a - \eta_c)}$$

$$N_{b\xi} = \frac{(\xi - \xi_a)(\xi - \xi_c)}{(\xi_b - \xi_a)(\xi_b - \xi_c)}$$

$$N_{b\eta} = \frac{(\eta - \eta_a)(\eta - \eta_c)}{(\eta_b - \eta_a)(\eta_b - \eta_c)}$$

$$N_{c\xi} = \frac{(\xi - \xi_a)(\xi - \xi_b)}{(\xi_c - \xi_a)(\xi_c - \xi_b)}$$

$$N_{c\eta} = \frac{(\eta - \eta_a)(\eta - \eta_b)}{(\eta_c - \eta_a)(\eta_c - \eta_b)}$$

$$N_{a\xi} = \frac{(\xi)(\xi - 1)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)$$

$$N_{a\eta} = \frac{1}{2}(\eta^2 - \eta)$$

$$N_{b\xi} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{(+1)(-1)} = (1 - \xi^2)$$

$$N_{b\eta} = (1 - \eta^2)$$

$$N_{c\xi} = \frac{(\xi + 1)(\xi)}{(2)(1)} = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)$$

$$N_{c\eta} = \frac{1}{2}(\eta^2 + \eta)$$

$$N_1 = N_{a\xi} N_{a\eta}$$

$$N_2 = N_{c\xi} N_{a\eta}$$

$$N_3 = N_{c\xi} N_{c\eta}$$

$$N_4 = N_{a\xi} N_{c\eta}$$

$$N_5 = N_{b\xi} N_{a\eta}$$

$$N_6 = N_{c\xi} N_{b\eta}$$

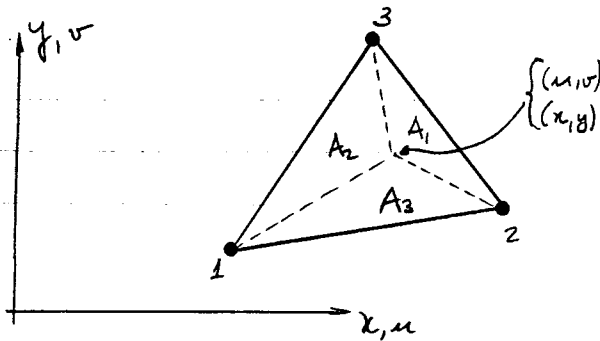
$$N_7 = N_{b\xi} N_{c\eta}$$

$$N_8 = N_{a\xi} N_{b\eta}$$

$$N_9 = N_{b\xi} N_{b\eta}$$

• Elementos isoparamétricos triangulares

Elemento Linear (triângulo de deformação constante - CST)-T3



Coordenadas naturais (coordenadas de área):

$$L_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3$$

Neste caso tem-se que:

$$N_1 = L_1$$

$$N_2 = L_2$$

$$N_3 = L_3$$

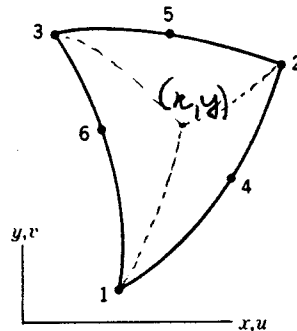
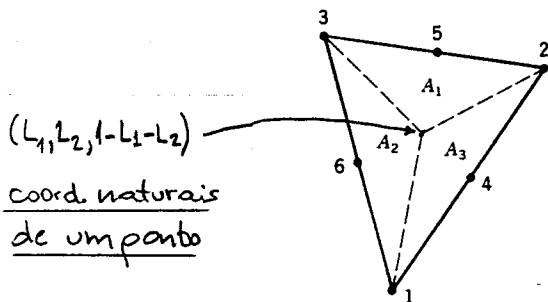
e,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{u\} = [N] \{d\}}$$

Vê-se que a formulação anterior do elemento T3 já era uma formulação isoparamétrica pois deslocamentos e coordenadas são interpolados da mesma forma.

Elemento quadrático



Espaço paramétrico
(lados retos)

Espaço cartesiano
(real, lados curvos)

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1$$

$$N_2 = (2L_2 - 1)L_2$$

$$N_3 = (2L_3 - 1)L_3$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

$$N_5 = 4L_2L_3$$

$$N_6 = 4L_3L_1$$

Observe que $N_i = N_i(L_1, L_2)$ pois $L_3 = 1 - L_1 - L_2$.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \\ x_6 \\ y_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [N] \{c\}$$

e

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{d\}$$

• Diferenciação e Jacobiano para elemento triangulares

Observe que, apesar de existirem três coordenadas de área, existem apenas duas coordenadas naturais (ξ, η) , onde:

$$\begin{aligned}L_1 &= \xi \\L_2 &= \eta \\L_3 &= 1 - \xi - \eta.\end{aligned}$$

Desta forma, a diferenciação de uma função de forma N_i em relação às coordenadas naturais pode ser expressa por:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}$$

A matriz do Jacobiano, para o elemento quadrático, pode então ser obtida:

$$x = \sum_{i=1}^6 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{6,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \dots & N_{6,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix}$$

E a diferenciação em relação às coordenadas cartesianas é:

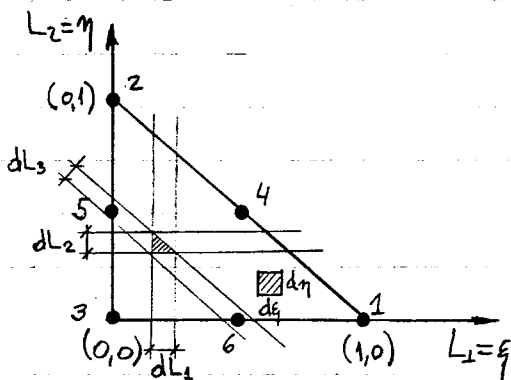
$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}$$

Deformações de um ponto

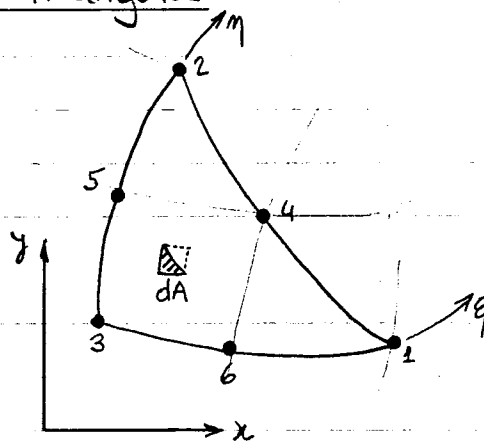
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \dots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \dots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \dots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{E\} = [B]\{d\}}$$

Integração Numérica para Triângulos



Espaço paramétrico



Espaço cartesiano

$$I = \int_A \phi(L_1, L_2, 1-L_1-L_2) dA \quad \text{onde} \quad \boxed{dA = \frac{1}{2} |J| d\xi d\eta}$$

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

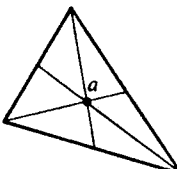
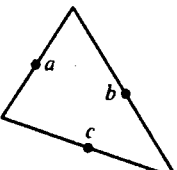
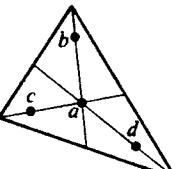
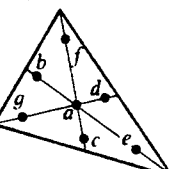
O fator $\frac{1}{2}$ aparece em dA porque o determinante do Jacobiano representa um fator de escala entre a área do quadrilátero infinitesimal $d\xi d\eta$ e a área da sua imagem no espaço cartesiano (que também é um quadrilátero). Como dA é um triângulo infinitesimal, o fator $\frac{1}{2}$ é necessário.

Para a integração numérica a integral I é aproximada por:

$$I \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{mpts} W_i |J_i| \phi_i$$

, onde as coordenadas e os pesos dos pontos de Gauss estão mostrados abaixo.

NUMERICAL INTEGRATION FORMULAE FOR TRIANGLES

Order (m)	Fig.	Error $O(h^{m+1})$	Points	Triangular Co-ordinates	Weights	Nº Points (mpts)
Linear ($m=1$)		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1	1
Quadratic ($m=2$)		$R = O(h^3)$	a b c	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	3
Cubic ($m=3$)		$R = O(h^4)$	a b c d	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $0.6, 0.2, 0.2$ $0.2, 0.6, 0.2$ $0.2, 0.2, 0.6$	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$	4
Quintic ($m=5$)		$R = O(h^6)$	a b c d e f g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0.22500,00000 0.13239,41527 0.12593,91805	7

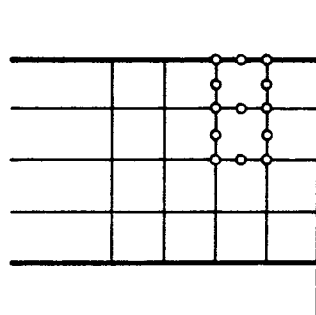
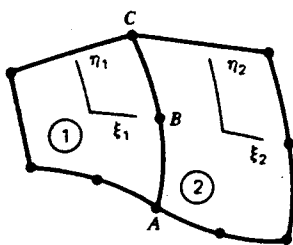
with
 $\alpha_1 = 0.0597158717$
 $\beta_1 = 0.4701420641$
 $\alpha_2 = 0.7974269853$
 $\beta_2 = 0.1012865073$

Na expressão acima os pesos W_i são obtidos diretamente utilizando coordenadas de área triangulares (não são obtidos a partir de produto de pesos unidimensionais). Por isso só aparece um somatório na expressão. Observe que a soma dos pesos em cada ordem é sempre 1, o que indica que os pesos estão normalizados em relação a uma unidade de área do triângulo.

Uma ordem de erro $O(h^{n+1})$ corresponde a um grau de precisão n . O grau de precisão se refere ao grau do polinômio completo (no espaço cartesiano) de mais alta ordem que é integrado exatamente pela integração numérica.

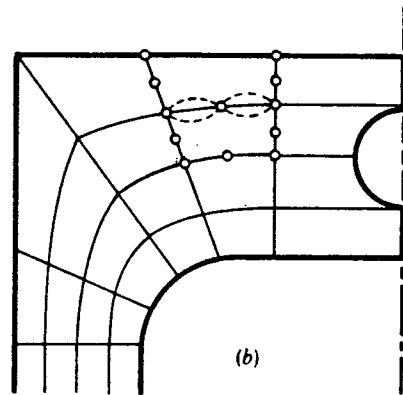
• Validade dos elementos isoparamétricos

Continuidade (geométrica e de deslocamentos) entre elementos



(a)

Espaço Paramétrico



(b)

Espaço cartesiano

- Teorema 1:

"Se dois elementos adjacentes têm funções de forma que satisfazem as condições de continuidade no espaço paramétrico, então os elementos distribuídos no espaço cartesiano satisfazem condições de continuidade geométrica e condições de continuidade em deslocamentos".

Exercício proposto: Demonstre o teorema.

Completitude (condição necessária para convergência)

- Teorema 2:

"A condição de deformação constante é satisfeita para todos os elementos isoparamétricos".

Demonstração:

Considere, sem perda de generalidade, um campo de deslocamentos lineares (deformação constante) u :

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (1)$$

Os mesmos deslocamentos expressões em termos de deslocamento nodais são:

$$u = \sum_i N_i u_i \quad (2)$$

Se a expressão (1) for avaliada em cada nó resulta em:

$$u_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) tem-se:

$$u = a_0 \sum_i N_i + a_1 \sum_i N_i x_i + a_2 \sum_i N_i y_i \quad (4)$$

Utilizando a interpolação isoparamétrica de coordenadas, $x = \sum_i N_i x_i$ e $y = \sum_i N_i y_i$, tem-se:

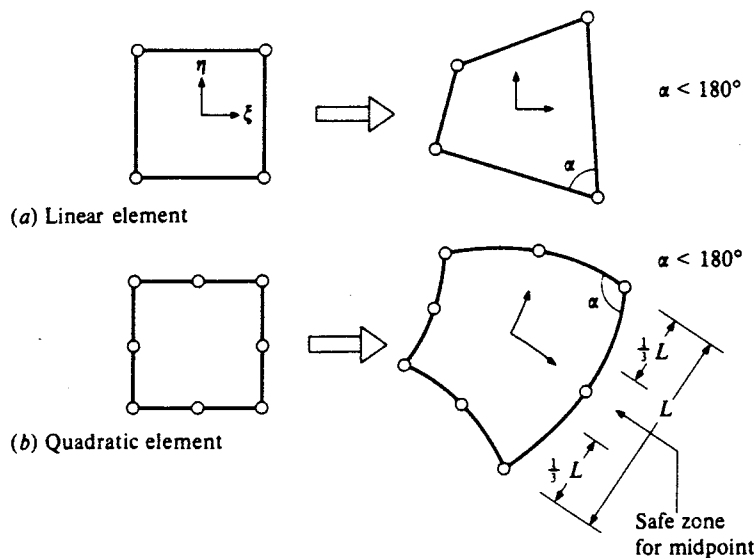
$$u = a_0 \sum_i N_i + a_1 x + a_2 y \quad (5)$$

Comparando (1) com (5) vê-se que o campo de deslocamentos lineares fica perfeitamente reproduzido na formulação isoparamétrica se $\sum_i N_i = 1$. Como isto é sempre verdade, fica demonstrado o teorema.

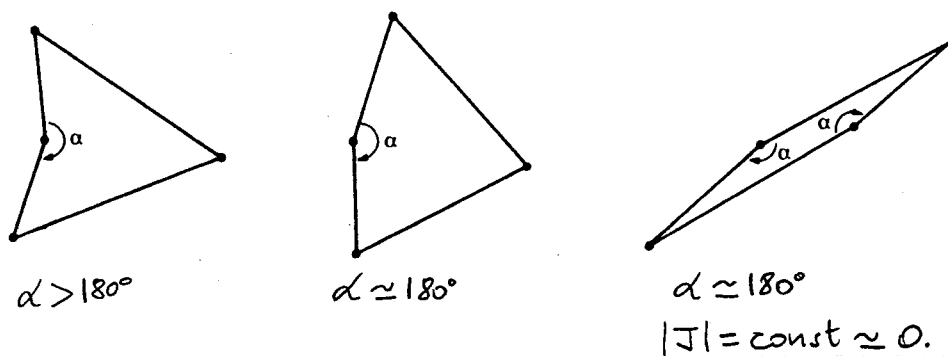
• Limitação na distorção de elementos isoparamétricos

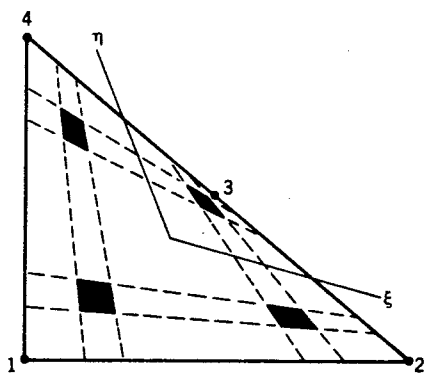
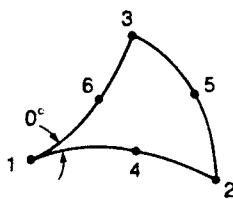
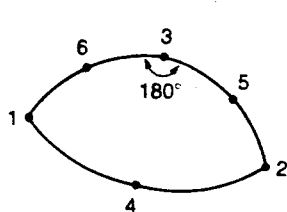
Para que se tenha unicidade do mapeamento do espaço paramétrico para o espaço cartesiano (mapeamento unívoco - "um-para-um") é necessário que o sinal do determinante do Jacobiano não se modifique ao longo de todo o domínio mapeado.

A figura abaixo mostra algumas regras para manter a unicidade do mapeamento.

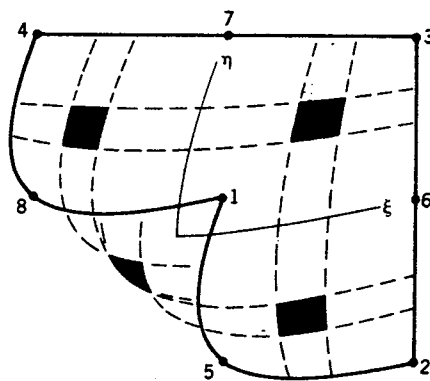


Em seguida são mostrados alguns exemplos de mapeamentos não válidos ou que resultam em elementos mal-condicionados.

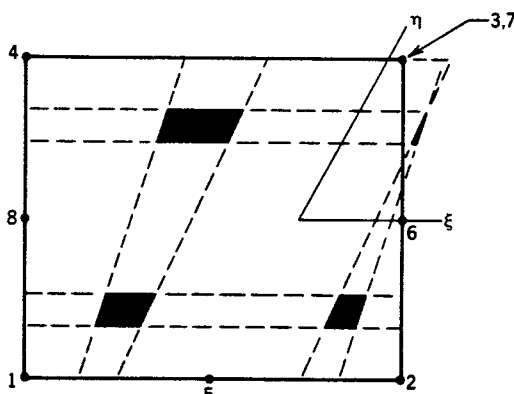




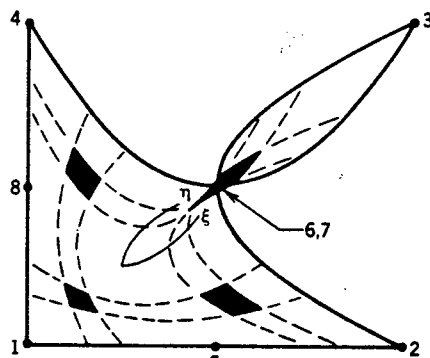
(a)



(b)



(c)



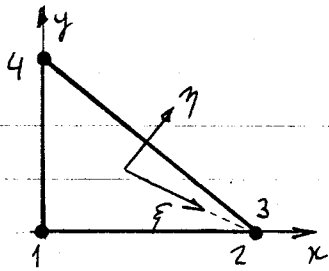
(d)

A título de exercício vai-se mostrar para um elemento bi-linear mal-conformado aonde o determinante do Jacobiano é nulo ou troca de sinal.

Neste caso,

$$|J| = \frac{1}{8} \left\{ \begin{aligned} &[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)] + \\ &[(x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)] \cdot \xi + \\ &[(x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3)] \cdot \eta \end{aligned} \right\}$$

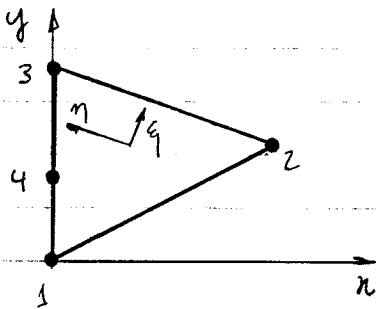
(a) Elemento com lado colapsado



lado $\xi = 1$

$$|J| = 0 \quad \forall \eta$$

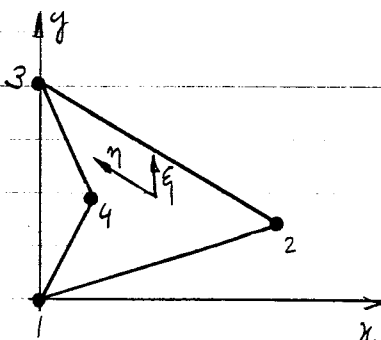
(b) Ângulo igual a 180°



ponto $\xi = -1, \eta = 1$

$$|J| = 0$$

(c)



pontos $\left\{ \begin{array}{l} \xi = -1, \eta = -1 \\ \xi = 1, \eta = -1 \\ \xi = 1, \eta = 1 \end{array} \right\} \quad |J| > 0$

ponto $\xi = -1, \eta = 1$ $|J| < 0$

Como o determinante do Jacobiano é negativo em 4 e positivo em 1, 2 e 3, então $|J| = 0$ em um arco em torno do nó 4.