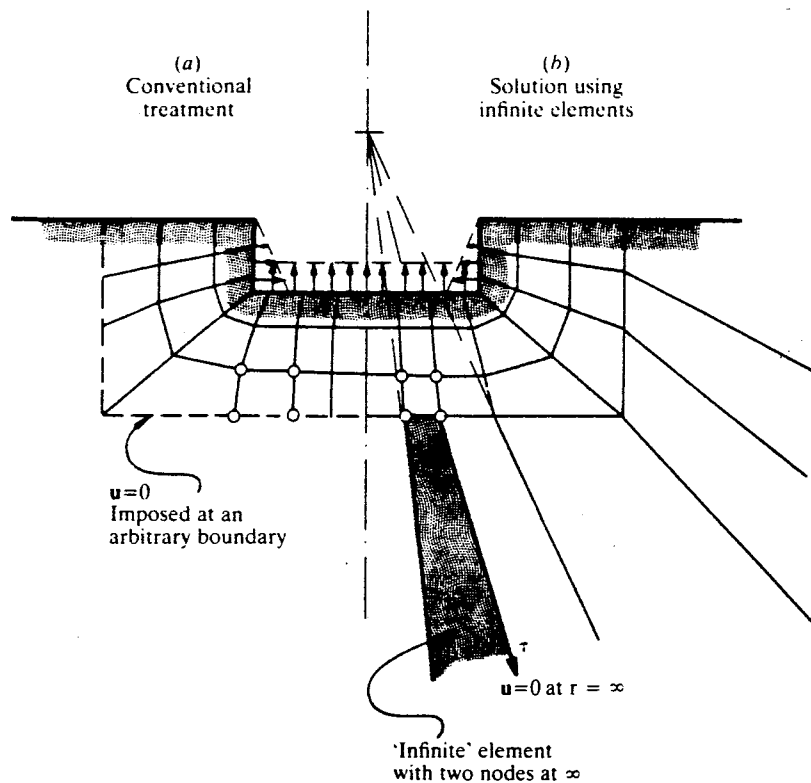


Modelagem de meios infinitos por elementos finitos

• Introdução

Em muitos problemas em engenharia existem domínios infinitos ou semi-infinitos. Um exemplo típico da mecânica estrutural é o da representação do comportamento do solo tal como mostrado abaixo.



O tratamento convencional consiste em modelar o meio infinito por um domínio finito cuja fronteira é rígida e posicionada a uma distância tal que a região de interesse "sinta" o comportamento infinito do meio.

Existem três problemas com este tratamento:

1) Nem sempre é claro onde a fronteira rígida deve ser posi-

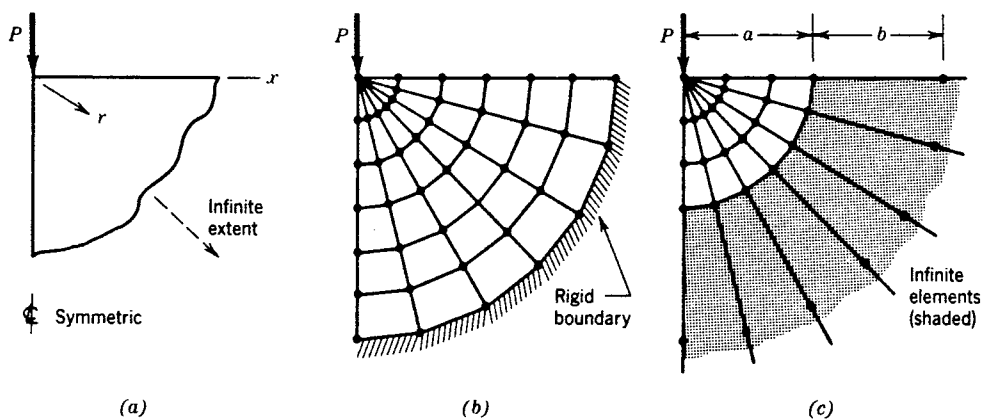
cionada.

- 2) A análise pode ser muito cara devido ao grande número de nós utilizados.
- 3) Em problemas de dinâmica estrutural do solo, a fronteira rígida reflete as ondas de propagação de deformações elásticas.

Para superar estes problemas é necessário modelar o meio semi-infinito exatamente. As soluções mais utilizadas são:

- 1) Representar o comportamento do meio semi-infinito utilizando elementos de contorno acoplados ao modelo de elementos finitos.
- 2) Utilizar elementos "semi-infinitos".

A primeira solução foge do domínio de um curso de elementos finitos. A segunda solução constitui uma forma eficiente de tratar o problema (vide figura abaixo) e será descrita a seguir.



(a) Load P on plane or axially symmetric body of infinite extent below the x axis. (b) Large mesh of conventional elements. (c) Smaller mesh, bounded by infinite elements.

• Elementos semi-infinitos mapeados

A idéia de elementos semi-infinitos é, sucintamente, estender o exterior de um modelo de elementos finitos de forma que ele fique sem fronteiras em alguns trechos. Isto requer funções de forma apropriadas e artificiais, que definem a geometria do elemento até o infinito, associadas a um aumento das variáveis (deslocamentos) até zero no infinito.

Estes elementos são formalmente chamados de semi-infinitos, mas frequentemente referidos como infinitos. Uma descrição do histórico do desenvolvimento de elementos infinitos pode ser encontrado em:

Bettess, P. e Bettess, J.A., "Infinite Elements for Static Problems", Engineering Computations, Vol. 1, No. 1, pp. 4-16, 1984.

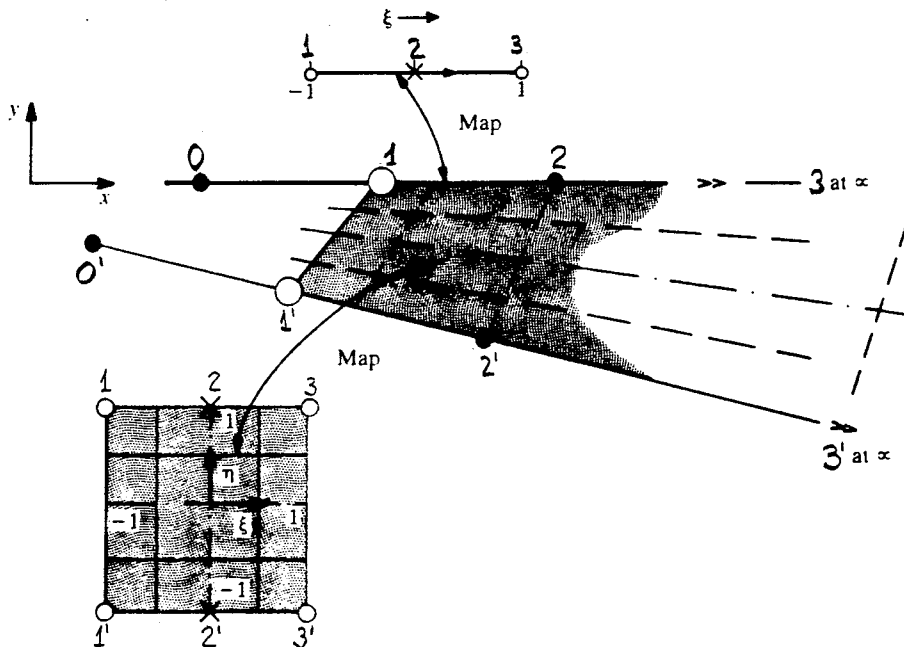
De acordo com os métodos empregados, os elementos infinitos podem ser divididos em dois grupos:

- 1) Elementos infinitos com funções de cimento. Referências:
Bettess, P., "Infinite Elements", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 11, No. 1, pp. 53-64, 1977.
Bettess, P. "More on Infinite Elements", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 15, No. 11, pp. 1613-1626, 1980.
Beer, G. e Meek, J.L., "'Infinite Domain' Elements", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 17, No. 1, pp. 43-52, 1981.
- 2) Elementos infinitos mapeados. Referências:
Zienkiewicz, O.C., Emson, C. e Bettess, P., "A Novel Boundary Infinite Element", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 19, No. 3, pp. 393-404, 1983.
Marques, J.M.M.C. e Owen, D.R.J., "Infinite Elements

in "Quasi-Static Materially Nonlinear Problems", Computers & Structures, Vol. 18, No. 4 pp. 739-751, 1984.

No primeiro grupo o tamanho real do elemento é finito e o "caimento" das variáveis (deslocamentos) é introduzido através das funções de forma (interpolação) destas variáveis.

No segundo grupo são utilizadas as funções de forma convencionais para as variáveis, mas o "caimento" é introduzido através de um mapeamento de geometria, de forma que o elemento "cresce" para um tamanho infinito (vide figura abaixo). Este grupo é mais simples de ser implementado e é mais utilizado. Ele é descrito a seguir.



Infinite line and element map. Linear η interpolation

• Caso unidimensional

Considere o comportamento unidimensional ao longo da linha 012 da figura anterior, coincidindo com o eixo x . E considere também a seguinte função para o mapeamento do espaço paramétrico, definido por ξ , para o espaço cartesiano, definido por x :

$$x = \left(-\frac{\xi}{1-\xi} \right) x_0 + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi} \right) x_2 = \bar{M}_0 x_0 + \bar{M}_2 x_2 \quad (1)$$

Imediatamente pode-se observar que:

$$\xi = 0 \text{ corresponde a } x = x_2$$

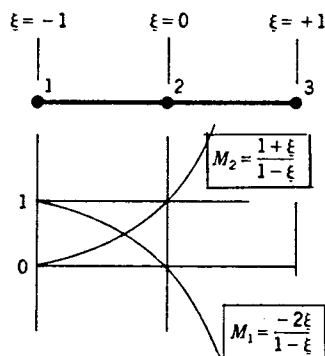
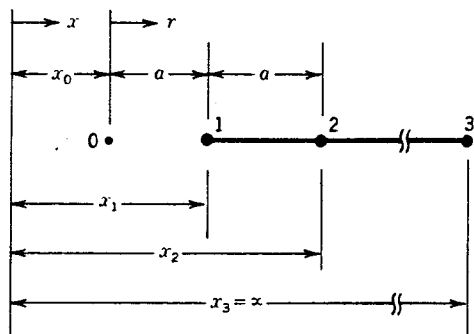
$$\xi = 1 \text{ corresponde a } x = x_3 = \infty$$

$$\xi = -1 \text{ corresponde a } x = \frac{x_0 + x_2}{2} = x_1$$

onde x_1 é o ponto médio entre x_0 e x_2

Alternativamente, o mapeamento poderia ter sido escrito direto em termos de x_1 e x_2 (por simples eliminação de x_0):

$$x = \left(-\frac{2\xi}{1-\xi} \right) x_1 + \left(1 + \frac{2\xi}{1-\xi} \right) x_2 = M_1 x_1 + M_2 x_2 \quad (2)$$



Ambas as formas são independentes do sistema de coordenadas pois $\overline{M}_0 + \overline{M}_2 = M_1 + M_2 = 1$.

A primeira forma de mapeamento mostra a importância do ponto O , que pode ser interpretado como a origem do caimento dos deslocamentos. Primeiro, define-se a distância radial como

$$r = x - x_0. \quad (3)$$

Depois, define-se uma função de interpolação para deslocamentos no espaço paramétrico como

$$u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots \quad (4)$$

E, a partir da expressão (1) obtém-se ξ em função de x como

$$\xi = 1 - \frac{x_2 - x_0}{x - x_0} = 1 - \frac{x_2 - x_0}{r} = 1 - \frac{2a}{r} \quad (5)$$

Substituindo ξ de (5) em (4), chega-se a uma variação para os deslocamentos u no espaço cartesiano da forma

$$u = C_0 + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C_3}{r^3} + \dots \quad (6)$$

Isto mostra que o ponto O é realmente a origem do caimento para o deslocamento u .

A formulação isoparamétrica para o elemento unidimensional corresponde a uma aproximação quadrática do deslocamento u no

espaço paramétrico (pois o deslocamento é interpolado por três pontos):

$$u = \left(\frac{\xi^2 - \xi}{2} \right) u_1 + (1 - \xi^2) u_2 + \left(\frac{\xi^2 + \xi}{2} \right) u_3 \quad (7a)$$

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (7b)$$

Substituindo $\xi = 1 - \frac{2a}{r}$ em (7) resulta em:

$$u = u_3 + (-u_1 + 4u_2 - 3u_3) \frac{a}{r} + (2u_1 - 4u_2 + 3u_3) \frac{a^2}{r^2} \quad (8)$$

O deslocamento do ponto 3 corresponde ao valor do campo de deslocamentos no infinito, que é normalmente nulo. Assim, esta condição pode ser automaticamente satisfeita usando para a interpolação de deslocamentos (7) somente os nós "finitos" 1 e 2:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 = [N] \{d\} \quad (9)$$

Isto quer dizer que o nó no infinito, 3, nunca será representado.

As deformações no caso unidimensional são:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = [N_{1,x} \quad N_{2,x}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (10a)$$

ou

$$\epsilon_x = \frac{1}{J} [N_{1,\xi} \quad N_{2,\xi}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B] \{d\} \quad (10b)$$

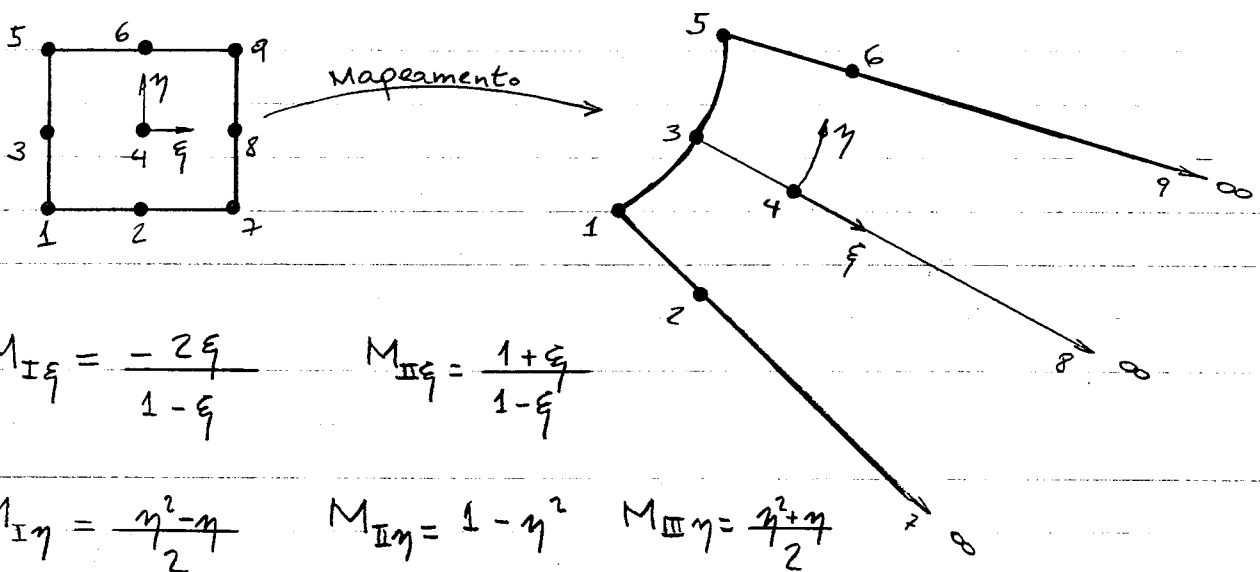
onde

$$J = M_{1,\xi} x_1 + M_{2,\xi} x_2$$

• Elementos bidimensionais Lagrangeanos

A formulação para duas dimensões pode ser obtida como uma extensão do caso unidimensional. Isto é feito utilizando a formulação Lagrangeana. Primeiro vai se considerar o meio infinito em uma só direção e depois os elementos que se estendem até o infinito em duas direções.

— Elemento Lagrangeano com 6 nós



$$M_{I\xi} = \frac{-2\xi}{1-\xi}$$

$$M_{II\xi} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

$$M_{I\eta} = \frac{\eta^2 - \eta}{2}$$

$$M_{II\eta} = 1 - \eta^2$$

$$M_{III\eta} = \frac{\eta^2 + \eta}{2}$$

$$M_1(\xi, \eta) = M_{I\xi} M_{I\eta}$$

$$M_2(\xi, \eta) = M_{II\xi} M_{I\eta}$$

$$M_3(\xi, \eta) = M_{I\xi} M_{II\eta}$$

$$M_4(\xi, \eta) = M_{II\xi} M_{II\eta}$$

$$M_5(\xi, \eta) = M_{I\xi} M_{III\eta}$$

$$M_6(\xi, \eta) = M_{II\xi} M_{III\eta}$$

$$x = \sum_{i=1}^6 M_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^6 M_i y_i$$

A interpolação de deslocamentos é feita no espaço paramétrico exatamente como no elemento quadrático Lagrangeano com nove nós, exceto que somente as funções de forma dos seis nós que são representados são utilizadas:

$$N_{I\xi} = \frac{\xi^2 - \xi}{2}$$

$$N_{II\xi} = 1 - \xi^2$$

$$N_{I\eta} = M_{I\eta} = \frac{\eta^2 - \eta}{2}$$

$$N_{II\eta} = M_{II\eta} = 1 - \eta^2$$

$$N_{III\eta} = M_{III\eta} = \frac{\eta^2 + \eta}{2}$$

$$N_1 = N_{I\xi} N_{I\eta}$$

$$N_2 = N_{II\xi} N_{I\eta}$$

$$N_3 = N_{I\xi} N_{II\eta}$$

$$N_4 = N_{II\xi} N_{II\eta}$$

$$N_5 = N_{I\xi} N_{III\eta}$$

$$N_6 = N_{II\xi} N_{III\eta}$$

$$u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i$$

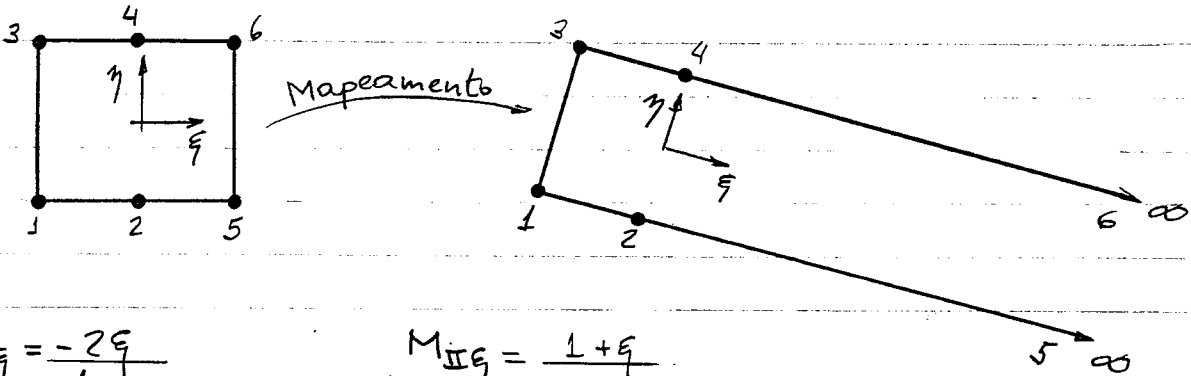
$$v = \sum_{i=1}^6 N_i v_i$$

Resumo:

6-Node	$N_1 = \xi\eta(-1+\xi)(-1+\eta)/4$	$M_1 = -\xi\eta(\eta-1)/(1-\xi)$
Lagrangian	$N_2 = \eta(1-\xi^2)(-1+\eta)/2$	$M_2 = \eta(1+\xi)(\eta-1)/[2(1-\xi)]$
Infinite	$N_3 = \xi(-1+\xi)(1-\eta^2)/2$	$M_3 = -2\xi(1-\eta^2)/(1-\xi)$
	$N_4 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$	$M_4 = (1+\xi)(1-\eta^2)/(1-\xi)$
	$N_5 = \xi\eta(-1+\xi)(1+\eta)/4$	$M_5 = -\xi\eta(\eta+1)/(1-\xi)$
	$N_6 = \eta(1-\xi^2)(1+\eta)/2$	$M_6 = \eta(1+\xi)(\eta+1)/[2(1-\xi)]$

- Elemento Lagrangeano com 4 nós

Este elemento deve ser utilizado acoplado a elementos finitos convencionais lineares. A diferença deste para o elemento Lagrangeano com 6 nós é que, agora, a interpolação de deslocamentos na direção η é linear. Este elemento se origina do elemento Lagrangeano com interpolação quadrática na direção ξ e linear na direção η .



$$M_{I\xi} = \frac{-2\xi}{1-\xi}$$

$$M_{II\xi} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

$$M_{I\eta} = \frac{1-\eta}{2}$$

$$M_{II\eta} = \frac{1+\eta}{2}$$

$$M_1 = M_{I\xi} M_{I\eta}$$

$$M_2 = M_{II\xi} M_{I\eta}$$

$$M_3 = M_{I\xi} M_{II\eta}$$

$$M_4 = M_{II\xi} M_{II\eta}$$

$$x = \sum_{i=1}^4 M_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 M_i y_i$$

Interpolação em deslocamentos:

$$N_1 = \frac{1}{4} (\xi^2 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (\xi^2 - \xi)(1 + \eta)$$

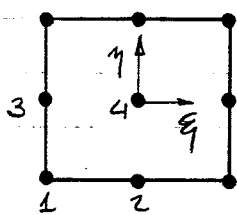
$$N_4 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$$

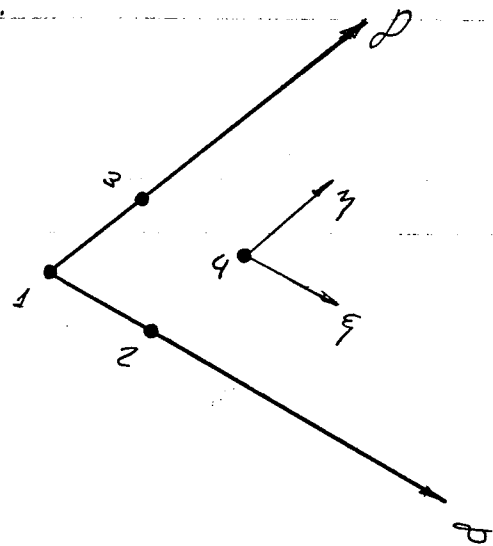
$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

— Elemento Lagrangeano duplamente infinito com 4 nós

Este elemento tem duas direções que se estendem para o infinito (adotadas as direções $+\xi$ e $+\eta$). Este tipo de elemento pode ser usado como elemento de "canto" em uma malha que representa um meio que estende para o infinito em diferentes direções. Este elemento se origina do elemento quadrático Lagrangeano com nove nós.



Mapeamento



$$M_{I\xi} = \frac{-2\xi}{1-\xi}$$

$$M_{II\eta} = \frac{1+\eta}{1-\eta}$$

$$M_{I\eta} = \frac{-2\eta}{1-\eta}$$

$$M_{II\xi} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

$$M_1 = M_{I\xi} M_{I\eta}$$

$$M_2 = M_{II\xi} M_{I\eta}$$

$$M_3 = M_{I\xi} M_{II\eta}$$

$$M_4 = M_{II\xi} M_{II\eta}$$

$$x = \sum_{i=1}^4 M_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 M_i y_i$$

Interpolação de deslocamentos:

$$N_1 = \frac{1}{4} (\xi^2 - \xi) (\eta^2 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (\eta^2 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi) (1 - \eta^2)$$

$$N_4 = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2)$$

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$$

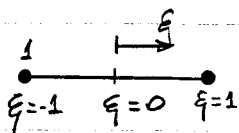
$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

• Elementos bidimensionais "Serendipity"

Estes elementos são originários do elemento quadrático, "Serendipity" com oito nós, conforme apresentado por Marques e Owen. A formulação também é feita "ao acaso", e por isso são classificados como "Serendipity".

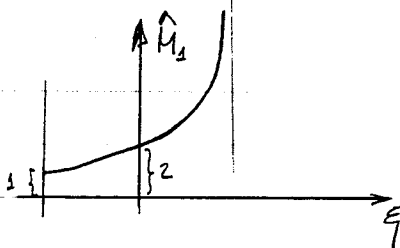
A interpolação de deslocamentos é tirada diretamente do elemento original Q8. As funções que mapeiam a geometria são construídas utilizando-se funções mais simples que são mostradas a seguir. Na construção das funções de mapeamento é importante manter $\sum M_i = 1$ para garantir a independência do sistema de coordenadas.

- Funções de construção

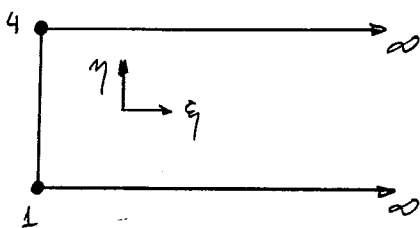


$$\hat{M}_1 = \frac{2}{1 - \xi}$$

Caso unidimensional



$$\xi = 0 \Rightarrow \hat{M}_1 = 2$$

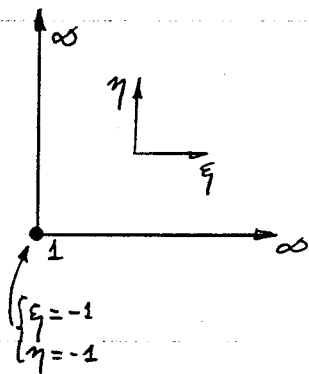


$$\hat{M}_4 = \left(\frac{2}{1 - \xi} \right) \left(\frac{1 + \eta}{2} \right)$$

Caso bidimensional

Linear em eta

$$\hat{M}_1 = \left(\frac{2}{1 - \xi} \right) \left(\frac{1 - \eta}{2} \right)$$



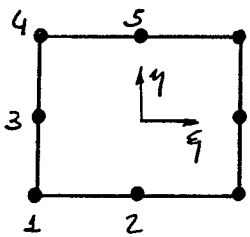
$$\hat{M}_1 = \frac{3 + \xi\eta}{(1-\xi)(1-\eta)}$$

Caso bidimensional
infinito em duas dimensões

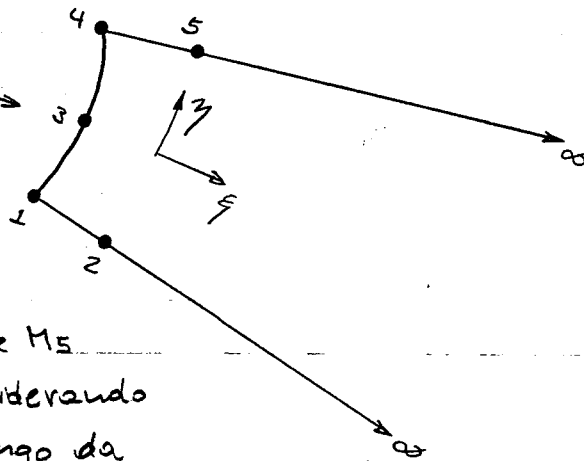
$$\left. \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = -1 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{3}{2}$$

— Elemento "Serendipity" com 5 nós



Mapeamento



As funções de mapeamento M_2 e M_5 são construídas diretamente considerando um comportamento linear ao longo da direção η :

$$M_2 = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \left(\frac{1-\eta}{2} \right)$$

$$M_5 = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \left(\frac{1+\eta}{2} \right)$$

A função de mapeamento M_3 é construída diretamente considerando um comportamento quadrático para η ao longo do bordo $\xi = -1$:

$$M_3 = \left(\frac{2}{1-\xi} \right) (1-\eta^2)$$

A construção de M_2 e M_4 começa por observar que:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = -1 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_4 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = -1 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_4 = \frac{1}{2}$$

Portanto, utilizando a formulação "serendipity", tem-se:

$$M_1 = \hat{M}_1 - 2M_2 - \frac{1}{2} M_3$$

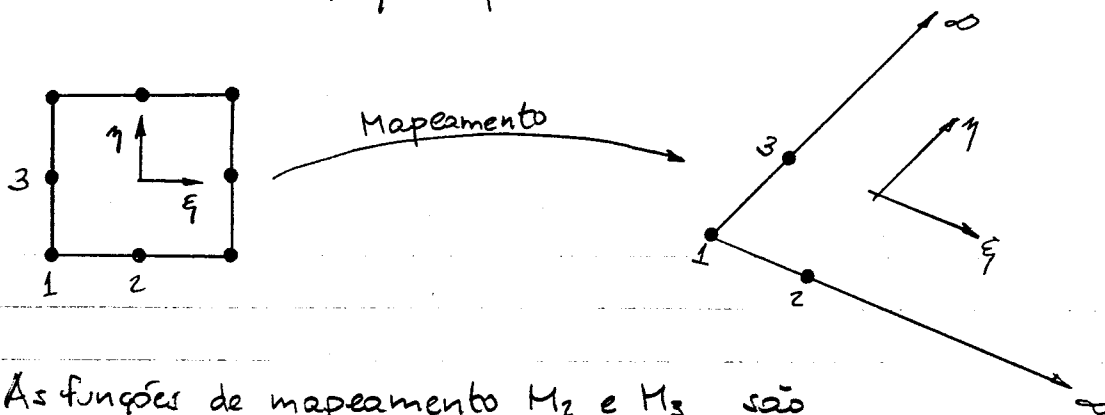
$$M_4 = \hat{M}_4 - 2M_5 - \frac{1}{2} M_3$$

Abaixo estão resumidas as funções de forma (obtidas diretamente do elemento original $\Phi 8$) e as funções de mapeamento. Observe que

$$\sum_{i=1}^5 M_i = 1 \quad \forall (\xi, \eta)$$

5-Node	$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)/4$	$M_1 = (1-\eta)(-1-\xi-\eta)/(1-\xi)$
Serendipity	$N_2 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2$	$M_2 = (1+\xi)(1-\eta)/[2(1-\xi)]$
Infinite	$N_3 = (1-\xi)(1-\eta^2)/2$	$M_3 = 2(1-\eta^2)/(1-\xi)$
	$N_4 = (1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)/4$	$M_4 = (1+\eta)(-1-\xi+\eta)/(1-\xi)$
	$N_5 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2$	$M_5 = (1+\xi)(1+\eta)/[2(1-\xi)]$

— Elemento "Serendipity" duplamente infinito com 3 nós



As funções de mapeamento M_2 e M_3 são construídas diretamente considerando o comportamento infinito nas duas direções:

$$M_2 = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) \left(\frac{2}{1-\eta} \right)$$

$$M_3 = \left(\frac{2}{1-\xi} \right) \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)$$

E a construção "Serendipity" para M_1 é:

$$M_1 = \hat{M}_1 - \frac{3}{2} M_2 - \frac{3}{2} M_3$$

Isto resulta em $\sum_{i=1}^3 M_i = 1 \quad \forall (\xi, \eta)$.

As funções de forma e de mapeamento estão resumidas abaixo:

3-Node	$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)/4$	$M_1 = [\xi\eta + 3(-1-\xi-\eta)]/$
Serendipity		$[(1-\xi)(1-\eta)]$
Infinite	$N_2 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2$	$M_2 = 2(1+\xi)/[(1-\xi)(1-\eta)]$
	$N_3 = (1-\xi)(1-\eta^2)/2$	$M_3 = 2(1+\eta)/[(1-\xi)(1-\eta)]$

- Deformações em elementos com mapeamento de geometria distinto das funções de forma

Considera-se o caso geral onde existem m funções de forma N_i que são utilizadas para interpolar as variáveis de campo (deslocamentos). Estas funções de forma podem estar associadas a nós reais e a graus de liberdade não nodais. A geometria fica definida por m funções de mapeamento M_i que estão associadas somente a nós reais.

As deformações de um ponto qualquer no interior do elemento ficam definidas como mostrado a seguir:

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^m N_i u_i \\ v = \sum_{i=1}^m N_i v_i \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sum_{i=1}^m M_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^m M_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \dots & N_{i,x} & 0 & \dots & N_{m,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \dots & 0 & N_{i,y} & \dots & 0 & N_{m,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \dots & N_{i,y} & N_{i,x} & \dots & N_{m,y} & N_{m,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_i \\ v_i \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

$$\{ \epsilon \} = [B] \{ d \}$$

$(3 \times 1) \quad (3 \times 2m) \quad (2m \times 1)$

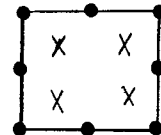
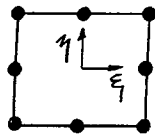
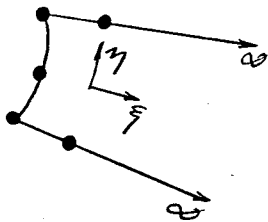
$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,\xi} & M_{2,\xi} & \dots & M_{i,\xi} & \dots & M_{m,\xi} \\ M_{1,\eta} & M_{2,\eta} & \dots & M_{i,\eta} & \dots & M_{m,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & y_i \\ \vdots & \vdots \\ x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (2 \times m) \quad (m \times 2)$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \partial y / \partial \eta & -\partial y / \partial \xi \\ -\partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \xi \end{bmatrix} \quad |J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}$$

• Matriz de rigidez e integração numérica

A integração numérica para a computação da matriz de rigidez de elementos infinitos é feita exatamente como para elementos com tamanho finito. Desta forma:

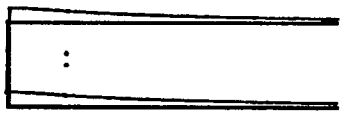



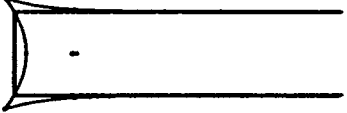
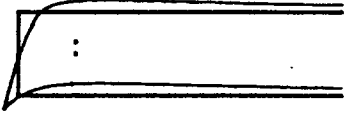

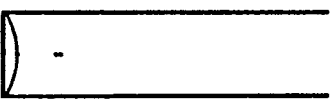

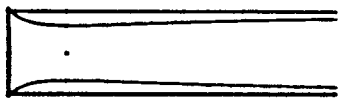

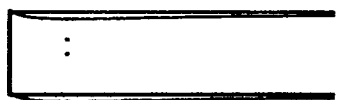


$$[K] = \int_{vol} [B]^T [E] [B] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] t |J| d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^{mp} [B_i]^T [E] [B_i] t |J_i| w_i$$

(2m x 2m) vol

• Considerações finais

Elementos infinitos mapeados são relativamente novos em aplicações de elementos finitos. A validade de suas formulações deve ser verificada, o que pode ser feito com auxílio de análises de autovalor dos elementos. Shen (Shen, T.-H.G., "An Educational Computer Graphics Program for Examining the Behavior of Single Two-Dimensional Finite Elements", M.Sc. Thesis, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, 1988) analisou diversos destes elementos e os autovalores do elemento infinito Lagrangeano com seis nós, com uma integração numérica 2x2, estão mostrados abaixo:

0.00%	0.03%	0.23%
		
0.35%	1.02%	1.16%
		
2.47%	3.02%	5.73%
		
13.52%	19.50%	52.94%
		
ELEMENT TYPE , 6-NODE LAGRAN. ANALYSIS TYPE , PLANE STRESS (2x2) TOTAL NODES , 12		Young's modulus , 2.900E+07 Poisson's ratio , 3.000E-01 Thickness , 1.000E+00

Os resultados destas análises de autovetor mostram que as deformações em todos os autovetores aproximam-se de zero no infinito.

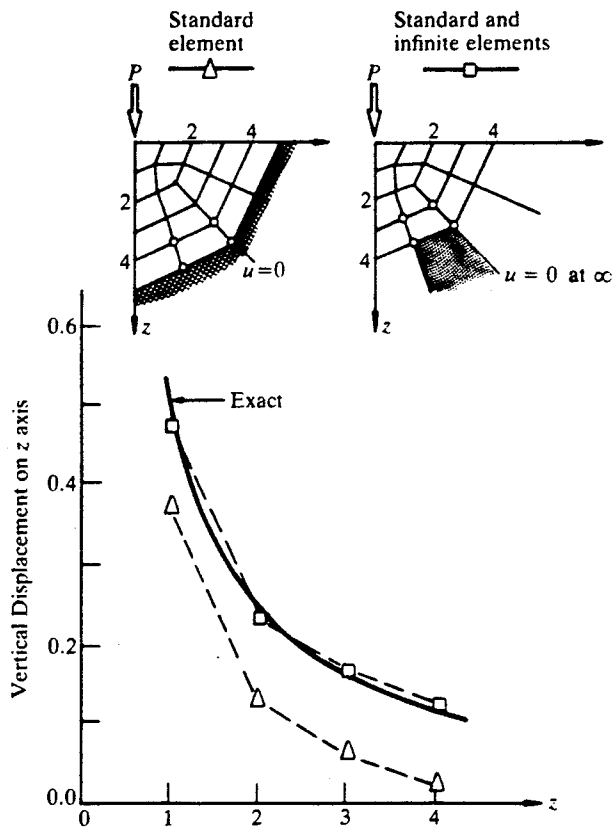
Estas observações confirmam que estes elementos podem representar satisfatoriamente o campo de deslocamentos de um domínio infinito, pois este campo dentro de um elemento é uma combinação linear de todos os autovalores deste elemento e os deslocamentos de um elemento semi-infinito devem cair para zero no infinito.

Além disso, observa-se que estes autovetores incluem modos de flexão, cisalhamento, etc., o que significa que estes elementos são apropriados para simular estruturas submetidas a diversos tipos de carregamento.

O que também se observa é a não existência de modos de deformação associados a movimentos de corpo rígido. Isto porque na formulação de elementos semi-infinitos os deslocamentos são restritos no infinito. Desta forma, estes elementos fornecem as necessárias condições de estabilidade de um modelo de elementos finitos sem que se precise incluir outras condições de suporte.

Shen também executou testes de invariância quanto à orientação geométrica para estes elementos, o que foi verificado.

A figura abaixo (Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., "The Finite Element Method", Vol. 1, 4ª edição, 1989, seção 8.13) mostra resultados da análise de uma carga pontual em um meio elástico semi-infinito.

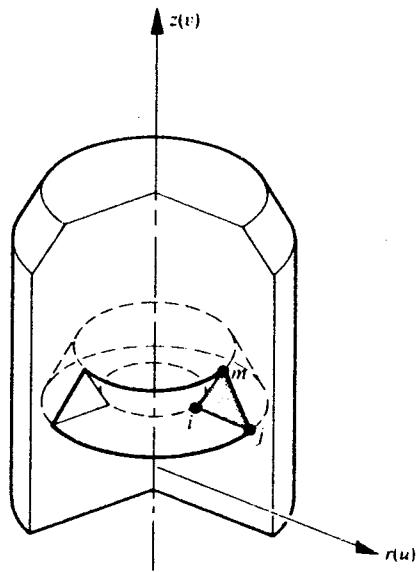


A point load on an elastic half-space (Boussinesq problem). Standard linear elements and infinite line elements ($E = 1$, $\nu = 0.1$, $p = 1$)

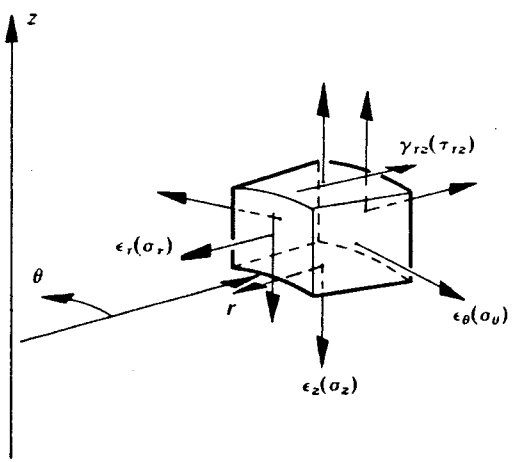
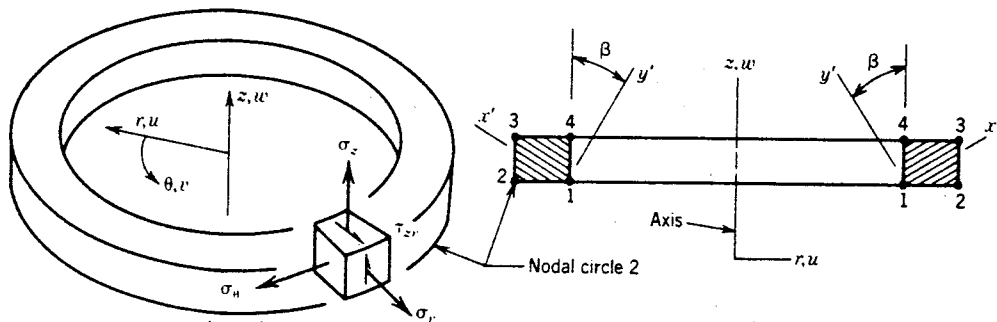
A geometria dos elementos infinitos é definida de tal forma que o ponto O (origem do calamento dos deslocamentos) fique situado no ponto de aplicação da carga.

Os resultados são comparados com uma análise usando condições de suporte fixo a uma distância finita, e a superioridade da análise utilizando elementos infinitos é evidente.

Formulação Axi-simétrica



Element of an axisymmetric solid



$$\gamma_{z\theta} = 0$$

$$\gamma_{r\theta} = 0$$

Strains and stresses involved in the analysis of axisymmetric solids

Quatro componentes independentes de tensão e deformação e a lei constitutiva do material elástico-linear:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}}$$

Relações deformações-deslocamentos:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \quad (\text{nunca avalia nada em } r=0)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{\epsilon\} = [D] \{u\}}$$

Interpolação de deslocamentos para um elemento genérico:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_i & 0 & \dots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_i & \dots & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_i \\ w_i \\ \vdots \\ u_m \\ w_m \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{u\} = [N] \{d\}}$$

Matriz deformação - deslocamentos nodais:

$$\{e\} = [D][N]\{d\} \quad \boxed{\{e\} = [B]\{d\}}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & \dots & [B_i] & \dots & [B_m] \end{bmatrix}$$

(4 x 2m)

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} N_i & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}$$

(4 x 2)

$$r = \sum_{i=1}^m M_i r_i$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

$$|J| = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,\xi} & M_{2,\xi} & \dots & M_{i,\xi} & \dots & M_{m,\xi} \\ M_{1,\eta} & M_{2,\eta} & \dots & M_{i,\eta} & \dots & M_{m,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & z_1 \\ r_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ r_i & z_i \\ \vdots & \vdots \\ r_m & z_m \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez do elemento:

$$[K]_{(2m \times 2m)} = \int_{Vol} [B]^T [E] [B] dV = \int_A \int_{-\pi}^{\pi} [B]^T [E] [B] r d\theta dA$$

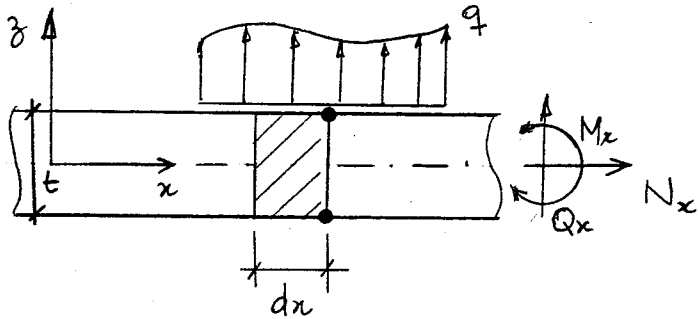
$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} [B]^T [E] [B] r d\theta |J| d\xi d\eta \quad \text{onde } r = \sum_{i=1}^m M_i r_i$$

Alternativamente,

$$[K]/rad = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] r |J| d\xi d\eta$$

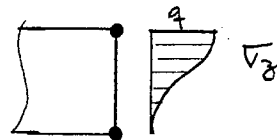
Flexão de Placas Planas

• Formulação de vigas delgadas e espessas (Zienkiewicz, Vol. 2, 1991)

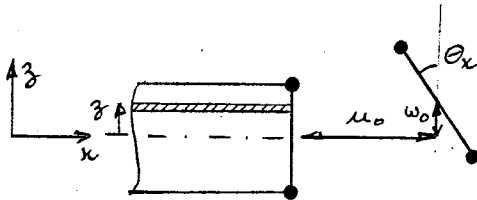


Hipóteses Básicas

- Seções normais ao plano médio permanecem planas
- Pequenos deslocamentos
- v_z e ϵ_z são nulos

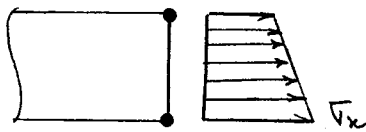


- Estado plano de tensões em cada camada.



$$\begin{cases} u_0 = u_0(x) \\ w_0 = w_0(x) \\ \theta_x = \theta_x(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = -\theta_x \cdot z + u_0 \\ w = w_0 \end{cases}$$



Tensões Normais σ_x



Tensões de cisalhamento τ_{xz}

Esforços

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \quad ; \quad M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z dz \quad ; \quad Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz$$

Deformações

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \cdot z + \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

Lei constitutiva do material

$$\sigma_x = E \epsilon_x$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$$

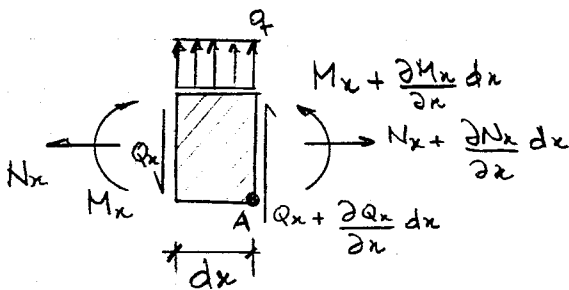
Esforços em termos de deformações (largura unitária)

$$N_x = Et \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$M_x = -\frac{Et^3}{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$Q_x = K G t \left(-\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (\text{tensão média ; } K = 5/6)$$

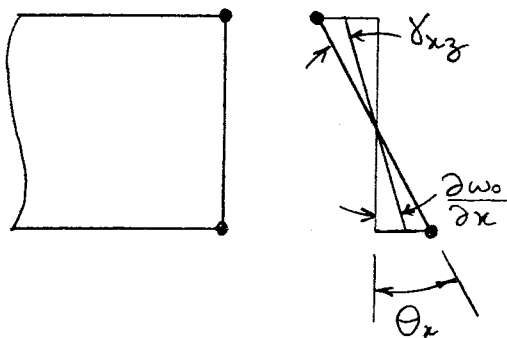
Condições de Equilíbrio



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \\ \sum F_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + q = 0 \end{array} \right.$$

Conclusões

- Efeito axial (u_0 e N_x) é independente e não vai ser considerado.
- Distorções por cisalhamento: $\gamma_{xz} = -\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$

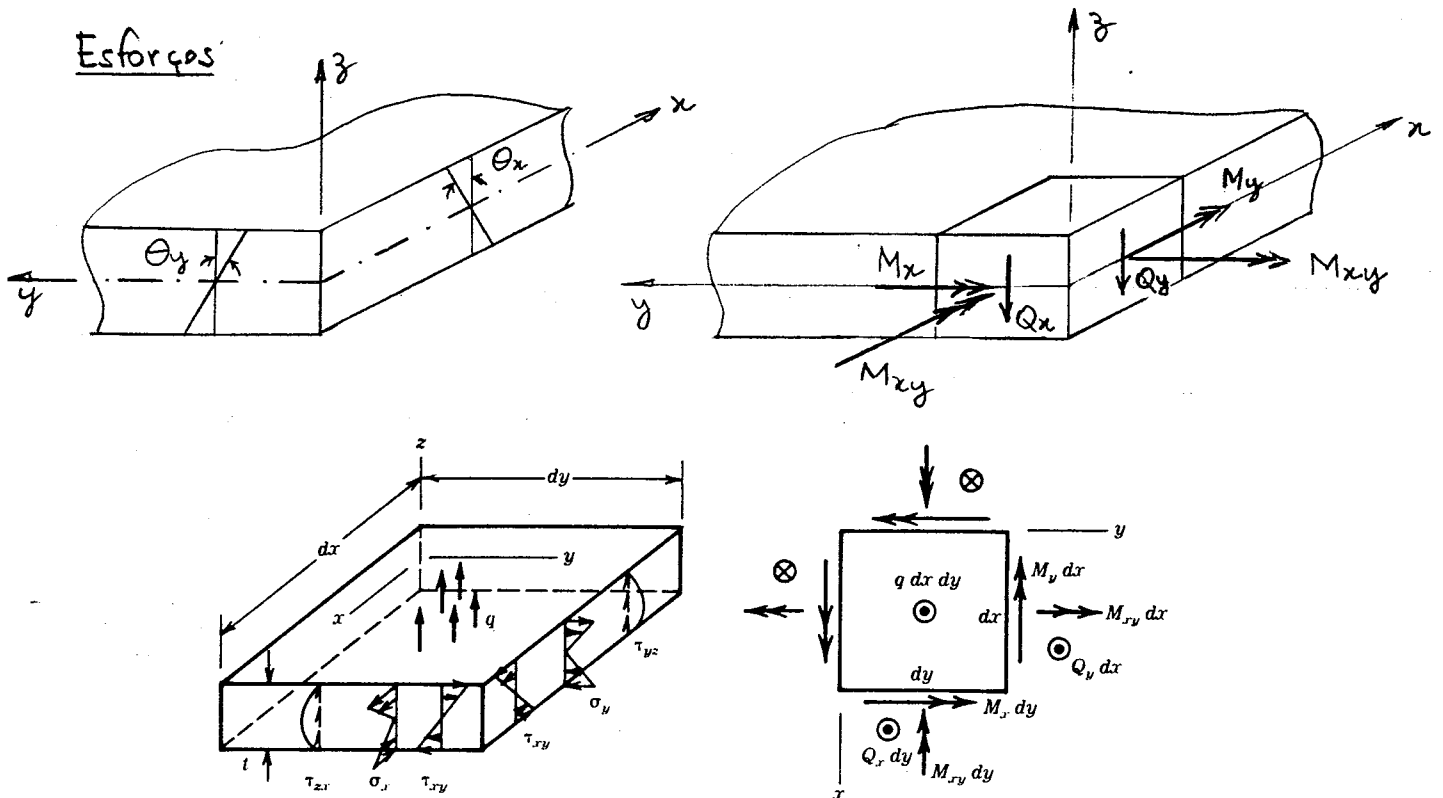


Viga espessa $\rightarrow \gamma_{xz} \neq 0$

Viga delgada $\rightarrow \gamma_{xz} = 0 \Rightarrow \theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}$

\Rightarrow Seções normais ao plano médio permanecem planas e normais a este plano

• Formulações para placas delgadas e espessas (Cook, 1989)



$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z \, dz \quad ; \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot z \, dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \, dz \quad ; \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \, dz$$

Deslocamentos

$$u = -\theta_x \cdot z \quad ; \quad v = -\theta_y \cdot z \quad ; \quad w = w_0$$

Deformações

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \cdot \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Lei constitutiva do material (cada lâmina é considerada um estado plano de tensões)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Esforços em termos de deformações (Momentos x curvatura; Cortantes x distorções)

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = KtG \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (K \approx 5/6)$$

Condições de Equilíbrio

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (3)$$

Placa delgada ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$)

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$\gg (1), (2), (3) \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + q \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} = 0}$$

Eq. Biharmônica p/ placas delgadas (equilíbrio em termos de deslocamento)

Energia de deformação

$$U = \int_V \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} dV$$

placa delgada: $\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$
 ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$)

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

placa espessa: $\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -z \cdot (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}) \\ (-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ (-\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}) \end{Bmatrix}$

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

A integral de volume da energia potencial pode ser dividida em uma integral de área e outra ao longo da espessura. Processando a integral ao longo da espessura resulta em:

$$U = \int_A \frac{1}{2} \{k\}^T [D] \{k\} dA$$

onde $\{k\}$ é o vetor das curvaturas.

placa delgada :

$$\{k\} = \{k_k\} = \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix}$$

$$[D] = [D_k] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

placa espessa :

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} \partial \theta_x / \partial x \\ \partial \theta_y / \partial y \\ \partial \theta_x / \partial y + \partial \theta_y / \partial x \\ \theta_x - \partial w / \partial x \\ \theta_y - \partial w / \partial y \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{Bmatrix} \partial \theta_x / \partial x \\ \partial \theta_y / \partial y \\ \partial \theta_x / \partial y + \partial \theta_y / \partial x \\ \theta_x - \partial w / \partial x \\ \theta_y - \partial w / \partial y \end{Bmatrix}} \right\} \begin{matrix} \text{acoplamento entre } w \text{ e} \\ (\theta_x, \theta_y) \text{ só se dá nestes termos.} \end{matrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_k] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D_s] = \begin{bmatrix} kTG & 0 \\ 0 & kTG \end{bmatrix}$$

• Solução pelo M.E.F. para placas delgadas

Variável de campo fundamental : w

Grav de diferenciação que aparece na energia de deformação : $m=2$

\Rightarrow continuidade entre elementos : C^1

$w, \frac{\partial w}{\partial s}$ e $\frac{\partial w}{\partial n}$ têm que ser contínuas ao longo de um bordo com direção tangencial \vec{s} e direção normal \vec{n} .

Graus de Liberdade nodais :

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{Bmatrix}$$

Nota:

Em uma implementação computacional normalmente se adota $\{w, R_x, R_y\}^T$ como graus de liberdade nodais, onde R_x e R_y são rotações em torno dos eixos x e y , respectivamente. Pela convenção adotada tem-se:

$$R_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{e} \quad R_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

Interpolação dos graus de liberdade nodais no domínio de um elemento

Admitindo que é possível encontrar funções de forma C^1 para interpolação do deslocamento transversal w no domínio de um elemento em função dos seus graus de liberdade (mais tarde será visto que isto é impossível), pode-se escrever:

$$w = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ \dots \ N_{3m-2} \ N_{3m-1} \ N_{3m}] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \hline w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline w_m \\ \theta_{xm} \\ \theta_{ym} \end{Bmatrix}$$

$w = [N] \{d\}$

Relações graus de liberdade nodais vs. curvaturas

$$\{k_k\} = \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 / \partial x^2 \\ \partial^2 / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 / \partial x \partial y \end{bmatrix} [N] \{d\} = [B] \{d\}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_{3m-2}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{3m-1}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{3m}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_{3m-2}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{3m-1}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{3m}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_3}{\partial x \partial y} & \dots & 2 \frac{\partial^2 N_{3m-2}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_{3m-1}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_{3m}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de um elemento

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [K_e] \{d\} = \int_A \frac{1}{2} \{k_k\}^T [D_k] \{k_k\} dA$$

$$\therefore [K_e] = \int_A [B]^T [D_k] [B] dA$$

• Solução pelo M.E.F. para placas espessas

Variáveis de campo fundamentais: w, θ_x, θ_y

Grav de diferenciação que aparece na energia de deformação: $m=1$

\Rightarrow continuidade entre elementos: C^0

w, θ_x, θ_y têm que ser contínuas entre os elementos, mas suas derivadas não precisam ser.

Interpolação dos graus de liberdade nodais no domínio de um elemento

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \vdots \\ w_m \\ \theta_{xm} \\ \theta_{ym} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N] \{d\}$$

Relações graus de liberdade nodais vs. curvaturas

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} \partial^2 \theta_x / \partial x^2 \\ \partial^2 \theta_y / \partial y^2 \\ \partial^2 \theta_x / \partial x \partial y + \partial^2 \theta_y / \partial y \partial x \\ \theta_x - \partial w / \partial x \\ \theta_y - \partial w / \partial y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial^2 / \partial x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial^2 / \partial y^2 \\ 0 & \partial^2 / \partial x \partial y & \partial^2 / \partial y \partial x \\ -\partial / \partial x & 1 & 0 \\ -\partial / \partial y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [\Delta] \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}$$

$$\{k\} = [\nabla][N]\{d\} = [B]\{d\}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & \partial N_1/\partial x & 0 & \dots & 0 & \partial N_m/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_1/\partial y & \dots & 0 & 0 & \partial N_m/\partial y \\ 0 & \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \dots & 0 & \partial N_m/\partial y & \partial N_m/\partial x \\ \hline -\partial N_1/\partial x & N_1 & 0 & \dots & -\partial N_m/\partial x & N_m & 0 \\ -\partial N_1/\partial y & 0 & N_1 & \dots & -\partial N_m/\partial y & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de um elemento

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [K_e] \{d\} = \int_A \frac{1}{2} \{k\}^T [D] \{k\} dA$$

$$\therefore [K_e] = \int_A [B]^T [D] [B] dA$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_k] & [0] \\ [0] & [D_s] \end{bmatrix}$$

$$[D_k] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[D_s] = \frac{5Gt}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $[B] = [B_k] + [B_s]$, onde

$$[B_k] = \begin{bmatrix} 0 & \partial N_1/\partial x & 0 & \dots & 0 & \partial N_m/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_1/\partial y & \dots & 0 & 0 & \partial N_m/\partial y \\ 0 & \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \dots & 0 & \partial N_m/\partial y & \partial N_m/\partial x \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\partial N_1/\partial x & N_1 & 0 & \dots & -\partial N_m/\partial x & N_m & 0 \\ -\partial N_1/\partial y & 0 & N_1 & \dots & -\partial N_m/\partial y & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

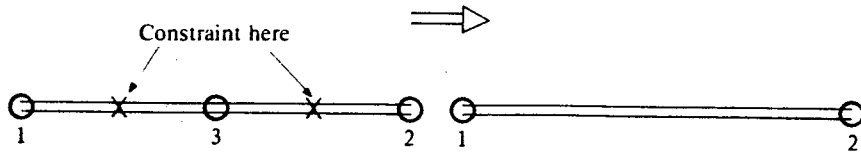
$$\Rightarrow [K_e] = [K_k] + [K_s], \text{ onde}$$

$$[K_k] = \int_A [B_k]^T \begin{bmatrix} [D_k] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} [B_k] dA$$

$$[K_s] = \int_A [B_s]^T \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [D_s] \end{bmatrix} [B_s] dA$$

No limite quando $t \rightarrow 0$, $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ diminui mais rápido que $\frac{5}{6} Gt$. Isto implica em: $[K_s]$ cresce artificialmente em relação à $[K_k]$ quando $t \rightarrow 0$. Assim, não aparece (artificialmente) deformação por flexão, Isto se denomina travamento ("locking") por cisalhamento.

• Elemento de viga com restrições Kirchhoff discretas (Zienkiewicz, Vol. 2)



$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

$N_i \rightarrow$ funções de forma quadráticas C^0

A condição de Kirchhoff $\theta - \partial w / \partial x = 0$ é forçada somente nos pontos com coordenadas x_α e $x_\beta \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(x_\alpha)}{\partial x} w_i - \sum_{i=1}^3 N_i(x_\alpha) \theta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(x_\beta)}{\partial x} w_i - \sum_{i=1}^3 N_i(x_\beta) \theta_i = 0 \end{cases}$$

Pode-se escrever $\begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$ em função dos outros parâmetros nodais:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_3(x_\alpha)}{\partial x} & -N_3(x_\alpha) \\ \frac{\partial N_3(x_\beta)}{\partial x} & -N_3(x_\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x_\alpha)}{\partial x} & -N_1(x_\alpha) \\ \frac{\partial N_1(x_\beta)}{\partial x} & -N_1(x_\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2(x_\alpha)}{\partial x} & -N_2(x_\alpha) \\ \frac{\partial N_2(x_\beta)}{\partial x} & -N_2(x_\beta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$[A_3] \begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = - [A_1] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} - [A_2] \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = - [A_3]^{-1} [A_1] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} - [A_3]^{-1} [A_2] \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

As novas funções de forma são escritas com o nó do centro eliminado:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 [\bar{N}_i] \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_i \end{Bmatrix}, \text{ onde } [\bar{N}_i] = N_i [\mathbf{I}] - [\mathbf{A}_3]^{-1} [\mathbf{A}_i] N_3$$

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑ ?

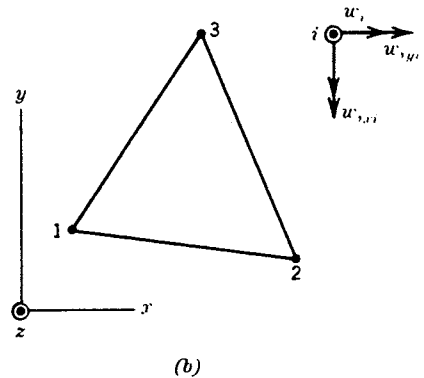
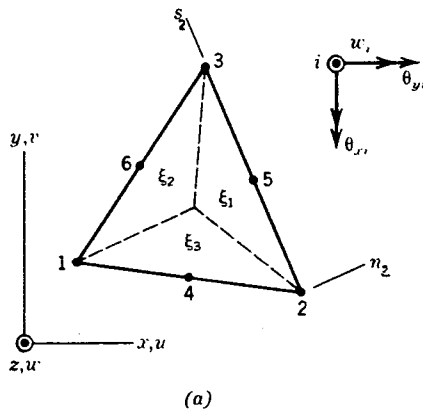
Se x_x e x_p coincidirem com as posições, no espaço cartesiano, de pontos de integração de Gauss de uma quadratura de ordem 2, então as funções $[\bar{N}_i]$ são iguais às funções cúbicas Hermitianas de vigas C^1 .

• Elemento triangular com restrições Kirchhoff discretas - DKT (Cook, 1989)

Este elemento pode ser visto como uma pilha de elementos de membrana quadráticos (T6), ligados por barras rígidas na direção da espessura em cada vértice do triângulo, e com restrições impostas nos nós de meio de lado.

1. O ponto de partida é o elemento triangular quadrático com lados retos, onde as rotações θ_x e θ_y são interpoladas usando as funções de forma do T6:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{x_i} \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{y_i} \end{aligned} \quad (1)$$



2. É considerado que o deslocamento transversal w tem uma variação cúbica ao longo de cada lado do triângulo. Assim, a derivada do deslocamento transversal em relação à direção tangencial s_i de cada lado pode ser obtida em função dos deslocamentos e derivadas dos nós extremos do lado. Em particular, as derivadas em relação a s_i podem ser avaliadas nos nós dos meios dos lados:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial w}{\partial s_1} \right]_4 &= -\frac{3}{2L_{12}} [w]_1 - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial w}{\partial s_1} \right]_1 + \frac{3}{2L_{12}} [w]_2 - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial w}{\partial s_1} \right]_2 \\
 \left[\frac{\partial w}{\partial s_2} \right]_5 &= -\frac{3}{2L_{23}} [w]_2 - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial w}{\partial s_2} \right]_2 + \frac{3}{2L_{23}} [w]_3 - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial w}{\partial s_2} \right]_3 \\
 \left[\frac{\partial w}{\partial s_3} \right]_6 &= -\frac{3}{2L_{31}} [w]_3 - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial w}{\partial s_3} \right]_3 + \frac{3}{2L_{31}} [w]_1 - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial w}{\partial s_3} \right]_1
 \end{aligned} \quad (2)$$

3. A partir de transformações de coordenadas, as seis derivadas nos nós de canto da expressão (2) são substituídas pelas seguintes seis derivadas:

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_1, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_2, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_3.$$

Assim, a expressão (2) é transformada para:

$$\left[\frac{\partial w}{\partial s_1} \right]_4 = g_1 \left([w]_1, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_1, [w]_2, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_2 \right)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial s_2} \right]_5 = g_2 \left([w]_2, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_2, [w]_3, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_3 \right) \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial s_3} \right]_6 = g_3 \left([w]_3, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_3, [w]_1, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_1 \right)$$

4. É considerado que a derivada do deslocamento transversal em relação à direção normal \underline{n}_i de cada lado do triângulo tem uma variação linear ao longo de cada lado. Em particular, estas derivadas podem ser avaliadas nos nós de meio de lado:

$$\left[\frac{\partial w}{\partial n_1} \right]_4 = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial w}{\partial n_1} \right]_1 + \left[\frac{\partial w}{\partial n_1} \right]_2 \right\}$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial n_2} \right]_5 = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial w}{\partial n_2} \right]_2 + \left[\frac{\partial w}{\partial n_2} \right]_3 \right\} \quad (4)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial n_3} \right]_6 = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial w}{\partial n_3} \right]_3 + \left[\frac{\partial w}{\partial n_3} \right]_1 \right\}$$

5. A partir de transformações de coordenadas, as seis derivadas nos nós de canto da expressão (4) são substituídas por derivadas em relação a \underline{x} e \underline{y} , resultando em:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial w}{\partial n_1} \right]_4 &= h_1 \left(\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_1, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_2 \right) \\
 \left[\frac{\partial w}{\partial n_2} \right]_5 &= h_2 \left(\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_2, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_3 \right) \\
 \left[\frac{\partial w}{\partial n_3} \right]_6 &= h_3 \left(\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_3, \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_1 \right)
 \end{aligned} \tag{5}$$

6. As restrições de Kirchhoff são impostas nos nós de canto, isto é, as deformações transversais γ_{xz} e γ_{yz} são consideradas nulas:

$$\begin{aligned}
 \theta_{x_1} &= \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_1, & \theta_{y_1} &= \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_1 \\
 \theta_{x_2} &= \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_2, & \theta_{y_2} &= \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_2 \\
 \theta_{x_3} &= \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_3, & \theta_{y_3} &= \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_3
 \end{aligned} \tag{6}$$

7. As restrições de Kirchhoff são impostas nos nós de meio de lado nas direções tangencial \underline{s}_i e normal \underline{n}_i , isto é, as deformações transversais γ_{sz} e γ_{mz} são consideradas nulas:

$$\begin{aligned}
 [\theta_{s_1}]_4 &= \left[\frac{\partial w}{\partial s_1} \right]_4, & [\theta_{m_1}]_4 &= \left[\frac{\partial w}{\partial m_1} \right]_4 \\
 [\theta_{s_2}]_5 &= \left[\frac{\partial w}{\partial s_2} \right]_5, & [\theta_{m_2}]_5 &= \left[\frac{\partial w}{\partial m_2} \right]_5 \\
 [\theta_{s_3}]_6 &= \left[\frac{\partial w}{\partial s_3} \right]_6, & [\theta_{m_3}]_6 &= \left[\frac{\partial w}{\partial m_3} \right]_6
 \end{aligned} \quad (7)$$

8. A partir de transformações de coordenadas, as rotações θ_{x_i} e θ_{y_i} dos nós de meio de lado são expressas em termos de θ_{s_i} e θ_{m_i} :

$$\begin{aligned}
 \theta_{x_4} &= p_1([\theta_{s_1}]_4, [\theta_{m_1}]_4), & \theta_{y_4} &= q_1([\theta_{s_1}]_4, [\theta_{m_1}]_4) \\
 \theta_{x_5} &= p_2([\theta_{s_2}]_5, [\theta_{m_2}]_5), & \theta_{y_5} &= q_2([\theta_{s_2}]_5, [\theta_{m_2}]_5) \\
 \theta_{x_6} &= p_3([\theta_{s_3}]_6, [\theta_{m_3}]_6), & \theta_{y_6} &= q_3([\theta_{s_3}]_6, [\theta_{m_3}]_6)
 \end{aligned} \quad (8)$$

9. A partir das expressões (3), (5), (6), (7) e (8), pode-se expressar as rotações θ_{x_i} e θ_{y_i} dos seis nós do elemento triangular em função dos nove graus de liberdade $[w]_i$, $[\frac{\partial w}{\partial x}]_i$, $[\frac{\partial w}{\partial y}]_i$ dos nós de canto do triângulo:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{x_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{x_6} \\ \theta_{y_6} \end{Bmatrix} = [T]_{(12 \times 9)} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_{,x_1} \\ w_{,y_1} \\ w_2 \\ w_{,x_2} \\ w_{,y_2} \\ w_3 \\ w_{,x_3} \\ w_{,y_3} \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{d_\theta\} = [T] \{d\}} \quad (9)$$

10. As curvaturas são definidas como

$$\{k_k\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{array} \right\}$$

e, a partir da expressão (1), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{x2} \\ \vdots \\ \theta_{x6} \\ \theta_{y6} \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\{k_k\} = [B_0] \{d_\theta\}} \quad (10)$$

onde,

$$[B_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \dots & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix}$$

(3x12)

11. As curvaturas em um ponto qualquer no interior do elemento são definidas em função dos nove graus de liberdade w_i , $\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_i = \theta_{xi}$, $\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_i = \theta_{yi}$, utilizando a expressão (9):

$$\{k_k\} = [B_0] [T] \{d\}$$

$$\boxed{\{k_k\} = [B] \{d\}} \quad (11)$$

$$\boxed{[B] = [B_0] [T]}$$

12. As deformações são definidas em função das curvaturas, como na Teoria de Placas de Mindlin:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\{ \epsilon \} = -z [B_0] \{ d\theta \}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \{ \epsilon \} = -z \{ k_k \} \\ \{ \epsilon \} = -z [B] \{ d \} \end{matrix}} \quad (12)$$

13. A energia de deformação de um elemento é dada por:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \{ \epsilon \}^T [E] \{ \epsilon \} dV, \quad \text{onde } [E] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Assim, por (12):

$$U = \int_V \frac{1}{2} \{ k_k \}^T [E] \{ k_k \} z^2 dV = \int_A \frac{1}{2} \{ k_k \}^T [E] \{ k_k \} dA \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz$$

$$\boxed{\begin{matrix} U = \int_A \frac{1}{2} \{ k_k \}^T [D_k] \{ k_k \} dA \\ [D_k] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \\ D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \end{matrix}} \quad (13)$$

14. A matriz de rigidez do elemento DKT é obtida por:

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [k] \{d\}$$

Utilizando as expressões (11) e (13) tem-se:

$$U = \int_A \frac{1}{2} \{d\}^T [B]^T [D_k] [B] \{d\} dA = \frac{1}{2} \{d\}^T \int_A [B]^T [D_k] [B] dA \{d\}$$

Portanto,

$$\boxed{\begin{aligned} [k] &= \int_A [B]^T [D_k] [B] dA \\ [B] &= [B_0] [T] \end{aligned}} \quad (14)$$

15. Os momentos em qualquer ponto no interior do elemento são obtidos em função de $\{d\}$ utilizando-se a expressão (12) e as seguintes relações:

$$\{\nabla\} = [E] \{E\} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \\ \nabla_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \nabla_x \cdot z \, dz ; \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \nabla_y \cdot z \, dz ; \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \nabla_{xy} \cdot z \, dz$$

Assim, após a integração ao longo da espessura:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -[D_k] [B] \{d\}} \quad (15)$$

Observações:

- (a) Para um elemento homogêneo com espessura constante, a matriz de rigidez do elemento DKT pode ser integrada exatamente por uma quadratura com 3 pontos.
- (b) Existem fórmulas fechadas para computer a matriz de rigidez (veja Cook, 1989 - cap. 11).
- (c) O elemento quadrangular com restrições de Kirchhoff discretas - DKQ - é formulado de maneira análoga ao DKT, mas partindo do elemento quadrático quadrilateral - Q8 - com os lados retos.