



— APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS.

Referência Básica: [COOK 89]

Ivan Menezes

18.11.90



ÍNDICE		pag.
1.-INTRODUÇÃO		1
2.-TEORIA DAS PLACAS		4
2.1-TEORIA DAS PLACAS DE KIRCHHOFF		5
(a) HIPÓTESES BÁSICAS		5
(b) CAMPO DE DESLOCAMENTOS		5
(c) RELAÇÃO MOMENTO x CURVATURA		6
(d) ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS DELGADAS		7
2.2 - CONDIÇÕES DE CONTINUIDADE PARA AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO		15
2.3- TEORIA DAS PLACAS DE MINDLIN		22
(a) HIPÓTESES BÁSICAS		22
(b) CAMPO DE DESLOCAMENTOS		23
(c) RELAÇÃO MOMENTO x CURVATURA		24
(d) ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS ESPESSAS		26
(e) EXERCÍCIO		31
3.- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		37

FLEXÃO DE PLACAS PLANAS

1. INTRODUÇÃO

As placas planas são elementos estruturais que suportam esforços transversais por efeitos de FLEXÃO e de CISCALHAMENTO. Pontos situados sobre a superfície média da placa (plano "xy") se deslocam apenas ao longo da direção transversal "z", não havendo portanto, esforços no plano médio da placa (esforços de membrana). A figura (1) ilustra as componentes de tensão que atuam num elemento infinitesimal de placa.

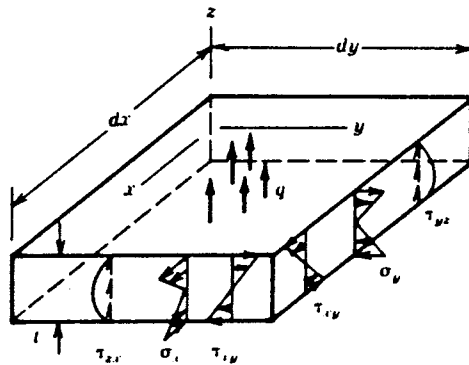


Fig. (1) - Tensões num elemento infinitesimal de placa*.
O carregamento transversal é "q" (Força por unidade de área) [COOK89].

* Considerando-se material homogêneo com comportamento linear elástico.

As tensões " σ_x e σ_y " variam linearmente com " z " estão associadas com os momentos fletores " M_x e M_y " através das seguintes expressões:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z \, dz \quad (1)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \cdot z \, dz$$

As tensões " τ_{xy} " também variam linearmente com " z " e estão associadas aos momentos de torção " M_{xy} " por:

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz \quad (2)$$

Na teoria das placas, as tensões normais " σ_z " são desprezíveis em comparação com " σ_x , σ_y e τ_{xy} ". As tensões de cisalhamento " τ_{xz} e τ_{yz} " variam quadraticamente com " z ".

O termo "placa à flexão" subentende que as cargas externas não possuem componentes no plano " xy " de tal forma que " σ_x , σ_y e τ_{xy} " são nulas na superfície média ou seja: ($z=0$).

As tensões cisalhantes " τ_{xz} e τ_{yz} " quando integradas ao longo da espessura conduzem aos esforços cortantes " Q_x e Q_y " dados respectivamente por:

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad (3)$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz$$

A fig.(2) mostra um elemento infinitesimal submetido a esforços solicitantes (momentos e cortantes) nos sentidos positivos com relação ao sistema de coordenadas "xyz".

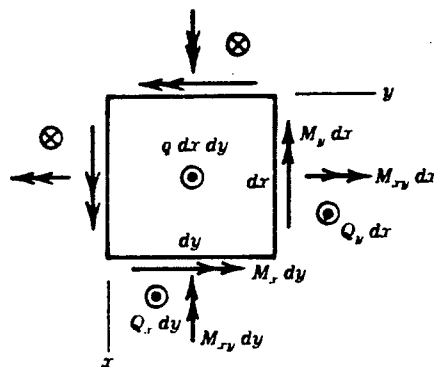


Fig. (2) - Sentidos positivos dos esforços solicitantes.

Convenção para os sentidos das forças cortantes:

- $\odot \Rightarrow$ sentido "+z"
- $\otimes \Rightarrow$ sentido "-z"

As tensões " σ_x , σ_y e τ_{xy} " assumem valores máximos nas superfícies extremas da placa, ou seja: para " $z = \pm t/2$ " e seus valores para " z " arbitrário são dados por:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{t^3/12} z ; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{t^3/12} z ; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{t^3/12} z \quad (4)$$

As tensões de cisalhamento são normalmente pequenas quando comparadas com as demais componentes de tensão. Seus valores máximos ocorrem em " $z = 0$ " e são dados por:

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{t} ; \quad \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{t} \quad (5)$$

2. TEORIA DAS PLACAS

- DELGADAS - Teoria das placas de KIRCHHOFF
- ESPESSAS - Teoria das placas de MINDLIN

"Diferença Básica: As deformações por cisalhamento são consideradas (de forma aproximada) na teoria de MINDLIN".

2.1 TEORIA DAS PLACAS DE KIRCHHOFF

a) HIPÓTESES BÁSICAS:

- Pontos situados na superfície média ($z=0$) movem-se apenas na direção "z" após as deformações por flexão.
- Retas inicialmente normais à sup. média da placa, antes da deformação, permanecem retas e normais à superfície média após as deformações (fig. 3).
- Pontos situados fora da superfície média da placa possuem componentes de deslocamento nas direções "x, y e z", dadas respectivamente por: "u, v e w".

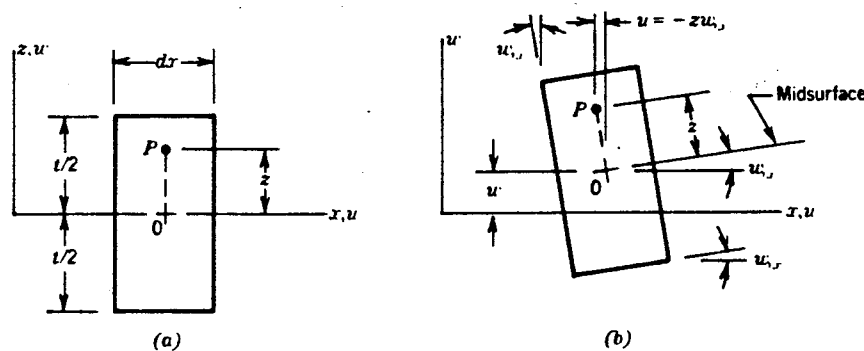


Figura (3) - Elemento infinitesimal de placa delgada: (a) antes e (b) após as deformações:

b) CAMPO DE DESLOCAMENTOS:

$$\begin{cases} u = -z w_{,x} \\ v = -z w_{,y} \\ w = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = u_{,x} = -z w_{,xx} \\ \epsilon_y = v_{,y} = -z w_{,yy} \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = -2z w_{,xy} \end{cases} \quad (6)$$

c) RELACÃO MOMENTO x CURVATURA

- Componentes efetivas de Tensão: $\tilde{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$ (7)

- Relação Tensão x deformação:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \tilde{\epsilon} \quad \text{onde:} \quad \tilde{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

A relação MOMENTO x CURVATURA é obtida por integração das relações acima, ou, de forma equivalente, pela substituição de (4) e (6) em (8)

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \overbrace{\frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}}^D \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}^{\tilde{C}'} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ou ainda: $\tilde{M} = -D \tilde{C}' \tilde{k}$

onde: $D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} =$ Rigidez à flexão da placa

$$\tilde{k} = \langle w_{,xx} \quad w_{,yy} \quad 2w_{,xy} \rangle = \text{Curvaturas}$$

$$\tilde{D}_k = D \tilde{C}' \quad (10)$$



d) ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS DELGADAS

A energia de deformação de uma placa delgada é determinada a partir das componentes " ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} " do tensor das deformações $\tilde{\epsilon}$. Por sua vez, as deformações são determinadas a partir do deslocamento transversal " $w(x,y)$ ". O ponto de partida para formulação da matriz de rigidez do elemento é a energia de deformação " U ", a qual é dada por:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^t \tilde{C} \tilde{\epsilon} dV \quad (11)$$

onde:

$$\tilde{\epsilon}^t = \langle -z w_{,xx} \quad -z w_{,yy} \quad -2z w_{,xy} \rangle,$$

$$\tilde{C} \Rightarrow (\text{vide expressão 8}), \quad (12)$$

$$\text{e } dV = dz dS$$

A integração da expressão (11) ao longo da espessura do elemento conduz a:

$$U = \int_S \frac{1}{2} \tilde{k}^t \tilde{D}_k \tilde{k} dS \quad \text{chegar} \quad (13)$$

onde " \tilde{k} e \tilde{D}_k " estão definidos em (9) e (10) respectivamente.



A fig. (4) ilustra um elemento finito retangular para placas delgadas (Teoria de Kirchhoff). O elemento possui "12" graus de liberdade [COOK 89].

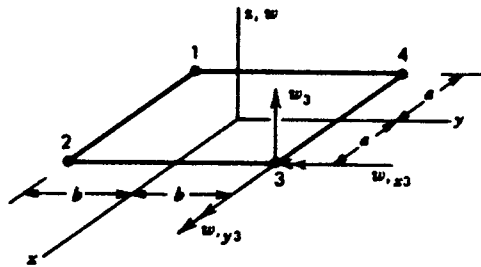


Fig. (4) - Elemento retangular (12 g.lib.), ilustrando os graus de liberdade do nó "3" [COOK 89].

O deslocamento transversal "w" é interpolado a partir de valores nodais "d", segundo a expressão:

$$w = \underset{\sim}{N}_{(1 \times 3n)} \cdot \underset{\sim}{d}_{(3n \times 1)} \quad (14)$$

onde: "n" = número de nós do elemento.

O vetor "k" das curvaturas é obtido diretamente a partir da expressão (14), por diferenciação, ou seja:

$$\underset{\sim}{k} = \left\{ \begin{array}{l} + \partial^2 / \partial x^2 \\ + \partial^2 / \partial y^2 \\ + 2 \partial^2 / \partial x \partial y \end{array} \right\} \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{d} \Rightarrow \underset{\sim}{k}_{(3 \times 1)} = \underset{\sim}{B}_{(3 \times 3n)} \underset{\sim}{d}_{(3n \times 1)} \quad (15)$$

- GRAUS DE LIBERDADE DO ELEMENTO KIRCHHOFF (\tilde{d}):

$$\tilde{d}^t = \langle w_1; w_{,x_1}; w_{,y_1}; \dots; w_n; w_{,x_n}; w_{,y_n} \rangle \quad (16)$$

- DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO (\tilde{N})

Para determinação das funções de interpolação para os elementos de placa delgada, é conveniente a utilização de expressões "polinômicas" que relacionam o deslocamento transversal "w" com os "3n" parâmetros nodais denominados "coordenadas generalizadas". Para o elemento em estudo, tem-se que:

$$n = 4 \text{ (n: de nós)} \implies 12 \text{ coordenadas generalizadas}$$

Adota-se, por exemplo:

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$$

ou ainda:

$$w = \langle 1; x; y; x^2; xy; y^2; x^3; x^2y; xy^2; y^3; x^3y; xy^3 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Matricialmente:

$$w = \tilde{X} \tilde{a} \quad (18)$$

A escolha dos termos polinomiais do vetor \tilde{X} deve atender ao requisito básico de "COMPLETITUDE" que juntamente com a condição de "CONTINUIDADE" do campo de deslocamentos, asseguram a convergência do método dos elementos finitos.

Um polinômio de grau "n" para ser completo, deve conter todos os termos de ordem inferior ou igual a "n". No exemplo em estudo são necessários 12 termos polinomiais. No entanto, um polinômio completo de ordem "3" necessita de "10 termos". Neste caso, acrescentam-se dois termos de ordem "4" procurando-se sempre buscar termos que estejam balanceados no TRIÂNGULO DE PASCAL*, para assegurar a ISOTROPIA GEOMÉTRICA [MART90].

*

Triângulo de Pascal	Grau do polinômio	Número de termos
1	0	1
x y	1	3
x ² xy y ²	2	6
x ³ x ² y xy ² y ³	3	10
x ⁴ x ³ y x ² y ² xy ³ y ⁴	4	15

⚡
Termos considerados em " \tilde{X} " (vide expressão 17)

Os coeficientes "a_i" podem ser calculados em função dos graus de liberdade "d_i" da seguinte forma:

$$w = \tilde{X} \tilde{a}$$

[Vide figura (4)]

$$\begin{cases} w \\ \frac{dw}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dw}{dy} \end{cases} \begin{cases} | \\ | \\ \vdots \\ | \end{cases} \begin{cases} x = -a \\ y = -b \\ \vdots \\ x = -a \\ y = b \end{cases} = \begin{cases} \tilde{X} \\ \frac{d\tilde{X}}{dx} \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{X}}{dy} \end{cases} \begin{cases} | \\ | \\ \vdots \\ | \end{cases} \begin{cases} x = -a \\ y = -b \\ \vdots \\ x = -a \\ y = b \end{cases} \tilde{a} = \begin{cases} w_1 \\ w_{,x_1} \\ \vdots \\ w_{,y_4} \end{cases} \quad (19)$$

Escrevendo-se as expressões acima na forma matricial, obtêm-se:

$$\tilde{d} = \tilde{A} \tilde{a} \quad (20)$$

ou também:

$$\tilde{a} = \tilde{A}^{-1} \tilde{d} \quad (21)$$

Substituindo-se a expressão (21) na expressão (18), chega-se a:

$$\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{A}^{-1} \underset{\sim}{d} \quad (22)$$

Comparando-se (22) com (14), obtém-se finalmente que:

$$\boxed{\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{A}^{-1}} \quad (23)$$

- MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTES

Seja uma placa delgada submetida a um carregamento distribuído uniforme "q". O indicador variacional do problema, que representa a energia potencial total do sistema, é dado por:

$$\Pi = U + V \quad (24)$$

onde:

U = energia interna de deformação

V = potencial das forças externas

De acordo com a expressão (13):

$$U = \int_S \frac{1}{2} \underset{\sim}{k}^t \underset{\sim}{D}_k \underset{\sim}{k} dS$$

O potencial das forças externas "V" é dado por:

$$V = - \int_S q \cdot w \, dS \quad (25)$$

A solução do problema (campo de deslocamentos) é obtida a partir da condição de estacionariedade do funcional Π , ou seja:

$$\delta^{(1)} \Pi = 0 \quad (26)$$

A expressão (26) traduz matematicamente a condição de energia potencial total mínima do sistema.

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \delta U + \delta V = 0 \quad (27)$$

Substituindo as expressões (13), (14), (15) e (25) na expressão (27), chega-se a:

$$\delta \tilde{d}^t \int_S \tilde{B}^t \tilde{D}_k \tilde{B} \, dS \tilde{d} - \delta \tilde{d}^t \int_S \tilde{N}^t q \, dS = 0$$

Para uma variação arbitrária de " \tilde{d} ", tem-se que:

$$\boxed{\tilde{K} \tilde{d} = \tilde{f}} \quad (28)$$

onde:

$$\underset{\sim}{K} = \int_S \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{D}_k \underset{\sim}{B} ds \quad (\text{MATRIZ DE RIGIDEZ})$$

$$(29)$$

e:

$$\underset{\sim}{f} = \int_S \underset{\sim}{N}^t q ds \quad (\text{CARREGAMENTO NODAL EQUIVALENTE})$$

Para o elemento retangular de 12 graus de liberdade tem-se:

$$w = \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{A}^{-1} \underset{\sim}{d}$$

$$\underset{\sim}{k} = \left\{ \begin{array}{l} + \partial^2 / \partial x^2 \\ + \partial^2 / \partial y^2 \\ + 2 \partial^2 / \partial x \partial y \end{array} \right\} \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{A}^{-1} \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{Z} \overset{\underset{\sim}{B}}{\underset{\sim}{A}^{-1}} \underset{\sim}{d} \quad (30)$$

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

$$(31)$$

Portanto:

$$\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{A}^{-t} \left[\int_S \underset{\sim}{Z}^t \underset{\sim}{D}_k \underset{\sim}{Z} ds \right] \underset{\sim}{A}^{-1} \quad ; \quad \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{A}^{-t} \int_S \underset{\sim}{X}^t q ds \quad (32)$$

2.2 - CONDIÇÕES DE CONTINUIDADE PARA AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO :

Uma condição necessária, porém não suficiente, para que um dado modelo de elementos finitos apresente soluções convergentes é que o campo de deslocamentos adotado satisfaça as chamadas "Condições de Continuidade".

Admitindo-se que a mais alta ordem da derivada que apareça no funcional da energia potencial total para as placas seja " m ", deve-se ter: [MART 90]

i) Continuidade interna:

O modelo de elementos finitos (em função do deslocamento " w ") deve ser diferenciável até a ordem mais alta " m " que aparece no funcional (para que haja uma integração não trivial).

ii) Continuidade entre elementos:

O modelo de elementos finitos deve ser contínuo entre os elementos até uma ordem a menos que a mais alta ordem " m " que aparece no funcional, isto é, ele deve ser de Continuidade " C^{m-1} ".



Nos problemas de placas delgadas, o funcional de energia potencial* contém derivadas segundas das funções incógnitas, logo: " $m=2$ ".

A primeira das duas condições anteriores é garantida pelo fato de se estar utilizando funções polinomiais. No entanto, de acordo com a segunda condição, o modelo de elementos finitos deve apresentar continuidade de 1ª ordem, ou seja: " C^1 ".

Portanto, não apenas o campo de deslocamentos " w " deve ser contínuo, mas a sua derivada " $\partial w / \partial n$ " também deve ser contínua na interface entre dois elementos quaisquer.

Para verificação desta condição de continuidade no elemento retangular em estudo, considere-se, por exemplo, a fig. (5) que representa o lado "1-2" de um elemento retangular.

$$\begin{aligned} * \quad \Pi &= U + V \quad \Rightarrow \quad U = \int_V \frac{1}{2} \tilde{k}^t D_k \tilde{k} \, dv \\ \tilde{k} &= \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad "m=2" \end{aligned}$$

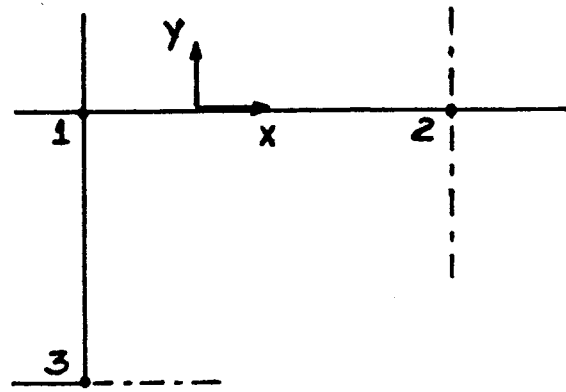


Figura (5) - Condição de Continuidade para as derivadas normais [ZIEN77]

A direcção normal "n" é na realidade a direcção "y", e, portanto, o objetivo é mostrar que "w" e " $\partial w / \partial y$ " estão definidos univocamente pelos valores de "w, $\partial w / \partial x$ e $\partial w / \partial y$ " nos pontos nodais que se encontram na linha "1-2".

Ao longo da linha "1-2" (ou seja: $y = \text{CONST}$), tem-se:

$$\begin{cases} w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots \\ \frac{\partial w}{\partial y} = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \dots \end{cases} \quad (33)$$

O número de constantes " a_i e b_i " é função do número de parâmetros nodais ao longo da linha "1-2". Por exemplo, se ao longo de "1-2" só existem 2 nós, então o deslocamento "w" pode variar cubicamente já que uma variação cúbica necessita de 4 parâmetros, quais sejam:

" w_1 ; $w_{,x_1}$; w_2 e $w_{,x_2}$ ". Por outro lado, a derivada " $\partial w / \partial y$ " só poderia variar LINEARMENTE em função de " $w_{,y_1}$ e $w_{,y_2}$ ".

Repetindo-se o raciocínio utilizado nas expressões (33), agora para o lado "1-3" ($x = \text{CONST}$), ou seja:

$$\begin{cases} w = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + \dots \\ \frac{\partial w}{\partial x} = d_1 + d_2 y + d_3 y^2 + \dots \end{cases} \quad (34)$$

Tem-se então:

Ao longo de (1-2) $\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y}$ ^(linear) que só depende dos parâmetros dos nós "1 e 2".

Ao longo de (1-3) $\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}$ ^(linear) que só depende dos parâmetros dos nós "1 e 3".

Derivando-se " $\frac{\partial w}{\partial y}$ " com relação a "x" tem-se que:

" $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ " que depende dos parâmetros dos nós "1 e 2".

Analogamente, derivando-se " $\frac{\partial w}{\partial x}$ " com relação a "y", obtém-se:

" $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ " que depende dos parâmetros dos nós "1 e 3".



No ponto comum (nó "1") surge imediatamente uma incoerência uma vez que não podemos ter automaticamente a condição necessária de continuidade, ou seja:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

para valores arbitrários dos parâmetros dos nós "2 e 3".

CONCLUSÃO:

"É impossível definir mediante expressões polinomiais simples, funções de interpolação que assegurem uma compatibilidade completa (C^1 , no caso) quando nos nós só são impostos os valores de "w" e de suas derivadas primeiras" [ZIEN77].

A continuidade do deslocamento "w" está assegurada pois, como já foi dito, uma variação cúbica de "w" necessita de 4 parâmetros para ser definida univocamente, que são os dois deslocamentos transversais " w_i e w_j " e as duas rotações " $w_{,s_i}$ e $w_{,s_j}$ ", ao longo de uma linha genérica "i-j".

Por outro lado, a derivada " $\partial w / \partial n$ ", obtida a partir da expressão (17), também apresenta uma variação cúbica, e como só existem 2 parâmetros nodais " $w_{,n_i}$ e $w_{,n_j}$ ", então esta derivada não é definida de forma unívoca. O Elemento é dito: "NÃO-CONFORME".

Apesar da violação da condição de continuidade de deslocamentos entre elementos não representam necessariamente a não convergência dos resultados (pelo contrário, muitos elementos "não-conformes" têm sido amplamente utilizados com resultados satisfatórios), vários pesquisadores desenvolveram elementos finitos para placas delgadas que satisfizessem as condições de continuidade. Exemplos de Elementos Finitos "CONFORMES" para placas delgadas podem ser encontrados, por exemplo, em [ZIEN 77], capítulo 10, seções 9, 10, 11 e 12.

— ELEMENTO TRIANGULAR PARA PLACAS DELGADAS —

A tentativa de formulação de um elemento finito triangular de maneira análoga ao elemento retangular estudado anteriormente, encontrou algumas dificuldades. Seja, por exemplo, o elemento finito triangular ilustrado na fig. (6).

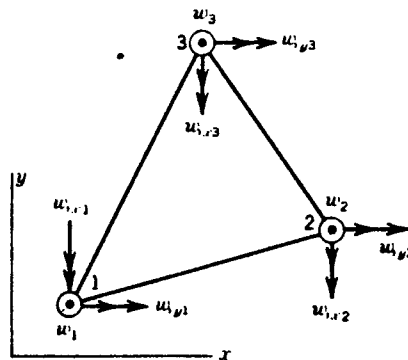


Figura (6) - Elemento finito triangular p/ placas delgadas.



De acordo com a Fig. (6), o elemento apresenta "9" graus de liberdade, e um polinômio cúbico completo apresenta "10" termos.

Dois campos de deslocamentos candidatos podem ser:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1 \\ \hline & \\ \hline X & Y \\ \hline X^2 & Y^2 \\ \hline X^3 & X^2Y & XY^2 & Y^3 \end{array} \\ (a) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 \\ \hline & \\ \hline X & Y \\ \hline X^2 & XY & Y^2 \\ \hline X^3 & (X^2Y + XY^2) & Y^3 \end{array} \\ (b) \end{array}$$

A opção (a) emite o termo "XY". O elemento resultante é incapaz de representar um estado de "TORÇÃO PURA", sendo portanto considerado inaceitável. A opção (b) conduz a um elemento que perde a "Isotropia geométrica", apresenta pobres propriedades de convergência e alguns problemas de singularidade na relação entre os graus de liberdade " \tilde{d} " e as coordenadas generalizadas " \tilde{a} " (vide expressão 20).

Mais informações sobre este elemento finito podem ser encontradas, por exemplo, em [COOK 89, ZIEN 77].

2.3-

TEORIA DAS PLACAS DE MINDLIN

a) HIPÓTESES BÁSICAS :

- Pontos situados na superfície média da placa ($z=0$), movem-se apenas na direção "z" após as deformações.
- Pontos situados sobre uma linha reta normal à superfície média da placa antes das deformações, permanecerão sobre esta linha reta, a qual não mais necessariamente será normal à superfície média após as deformações (vide Fig. 7).
- Pontos situados fora da superfície média da placa possuem componentes de deslocamento nas direções "x, y e z" dadas respectivamente por "u, v e w".
- Assim como na teoria de Kirchhoff, as tensões normais à superfície média da placa são desprezíveis.
- Consideram-se (de forma aproximada)* as deformações por cisalhamento.

* A hipótese de que as secções planas permanecem planas após as deformações afasta a possibilidade de empenamento ("warping") da secção, daí a expressão: "de forma aproximada".

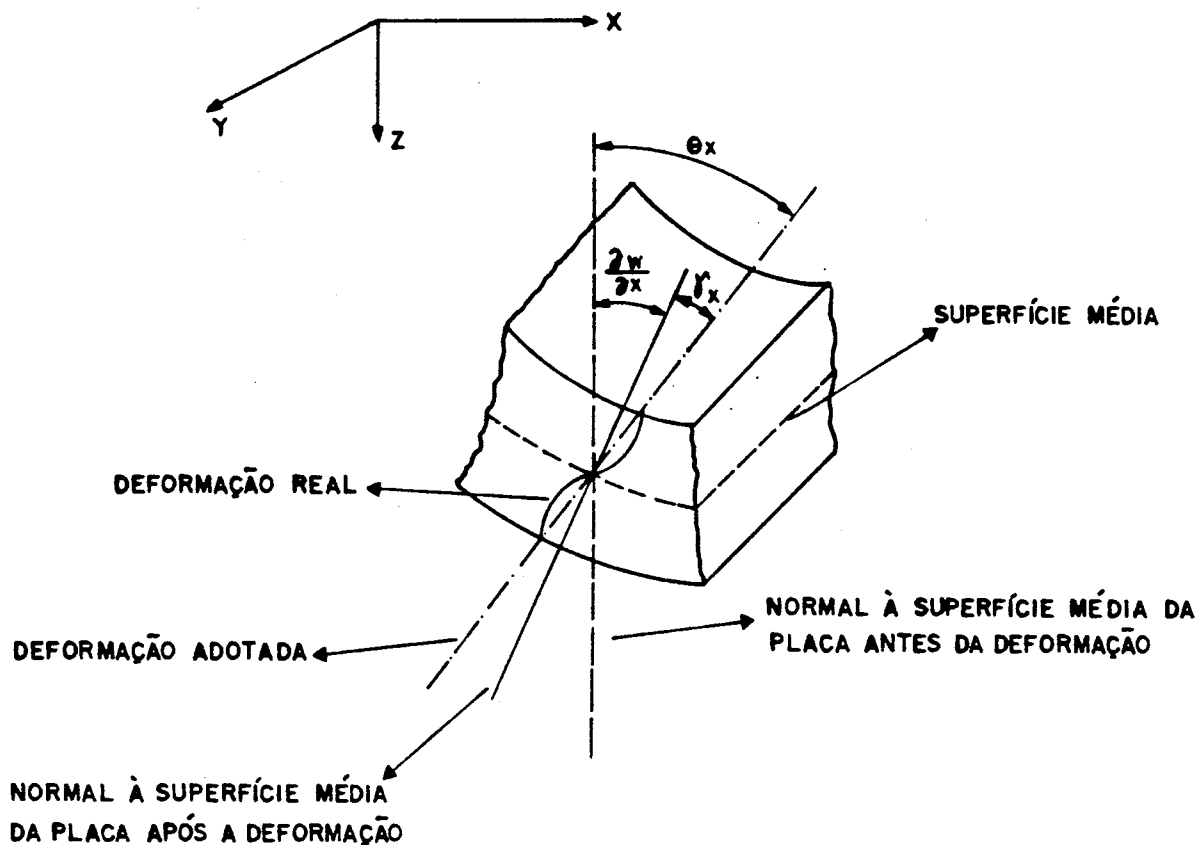


Figura (7) - Elemento infinitesimal de placa espessa
[HINT77]

b) CAMPO DE DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

$$\begin{cases} u = -z \theta_x \\ v = -z \theta_y \\ w = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = -z \theta_{x,x} \\ \epsilon_y = -z \theta_{y,y} \\ \gamma_{xy} = -z (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \end{cases} \quad (35)$$

Distorções devido ao cisalhamento.

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = w_{,x} - \theta_x \\ \gamma_{yz} = w_{,y} - \theta_y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_K^t &= -z \langle \theta_{x,x}; \theta_{y,y}; \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \rangle = -z \tilde{k}_K^t \\ \tilde{\epsilon}_S^t &= -\langle \theta_x - w_{,x}; \theta_y - w_{,y} \rangle = -\tilde{k}_S^t \end{aligned}$$

\tilde{k}_K → vetor de curvaturas para flexão
 \tilde{k}_S → para cisalhamento



c) RELAÇÃO MOMENTO x CURVATURA

Componentes efetivas de tensão:
$$\tilde{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Relação Tensão x Deformação:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \tilde{\epsilon}$$

onde:

$$\tilde{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

(37)

A relação MOMENTO x CURVATURA é obtida por integração das relações acima ao longo da espessura "t" da placa, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{D}_K & 0 \\ \hline 0 & \tilde{D}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial\theta_x/\partial x \\ \partial\theta_y/\partial y \\ \partial\theta_x/\partial y + \partial\theta_y/\partial x \\ \theta_x - \partial w/\partial x \\ \theta_y - \partial w/\partial y \end{Bmatrix} \quad (38)$$

onde:

\tilde{D}_K está apresentado na expressão (10)

$$\tilde{D}_s = \begin{bmatrix} K + G & 0 \\ 0 & K + G \end{bmatrix}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Material Isotrópico ($G_x = G_y = G$)

$K = \text{coef. de forma}$
($\approx 5/6$)

$$\tilde{k}^t = \left\langle \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}; \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x}; \theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle$$

↳ Vetor das curvaturas.

(39)

Obs: O coeficiente "K" é introduzido para corrigir a hipótese de que a distribuição de tensões cisalhantes " τ_{xz} e τ_{yz} " é uniforme. O valor "5/6" corresponde à consideração de uma distribuição parabólica das tensões, ou seja:

The diagram shows a rectangular cross-section of a beam. On the left, a parabolic shear stress distribution is shown, with the maximum value at the neutral axis. This is equated to a uniform shear stress distribution multiplied by a correction factor K.

d) ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS ESPESSAS.

Os elementos de placa formulados de acordo com a teoria de MINDLIN devem ser capazes de representar tanto as deformações por flexão quanto às deformações por cisalhamento. Portanto, na expressão da energia interna de deformação "U" deve constar as parcelas de trabalho das tensões cisalhantes " τ_{xz} e " τ_{yz} " sobre as distorções transversais " γ_{xz} e " γ_{yz} " respectivamente, ou seja:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dz dS \quad (40)$$

ou na forma matricial:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \int_{-t/2}^{t/2} \left[\begin{matrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{matrix} \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{matrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz dS \quad (41)$$

Integrando-se a expressão (41) ao longo da espessura e substituindo-se a relação Momento x Curvatura (expressão 38), obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \left[\underbrace{\tilde{k}_K^t D_K \tilde{k}_K}_{\text{PARCELA DE ENERGIA DEVIDO A FLEXÃO}} + \underbrace{\tilde{k}_S^t D_S \tilde{k}_S}_{\text{PARCELA DE ENERGIA DEVIDO AO CISALHAMENTO}} \right] ds \quad (42)$$

onde:

$$\tilde{k} = \begin{Bmatrix} \tilde{k}_K \\ \tilde{k}_S \end{Bmatrix} = \text{vetor das curvaturas} \\ \text{(vide expressão 39)}$$

Os graus de liberdade em cada nó de um elemento de placa espessa consistem num deslocamento transversal "w" e duas rotações "θ_x e θ_y".

O deslocamento "w" e as rotações "θ_x e θ_y" são interpolados de forma independente pelas mesmas funções de interpolação, ou seja:

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad ; \quad \theta_x = \sum_{i=1}^n N_i \theta_{x_i} \quad \text{e} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^n N_i \theta_{y_i} \quad (43)$$

onde. "n" é o número de nós dos elemento.

A expressão (43) pode ser escrita na forma matricial, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & | & N_2 & 0 & 0 & | & \dots & | & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & | & 0 & N_2 & 0 & | & \dots & | & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & | & 0 & 0 & N_2 & | & \dots & | & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_{x_n} \\ \theta_{y_n} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

ou ainda:

$$\begin{matrix} \tilde{u} \\ (3 \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \tilde{N} \\ (3 \times 3n) \end{matrix} \begin{matrix} \tilde{d} \\ (3n \times 1) \end{matrix} \quad (45)$$

As curvaturas (\tilde{k}) são dadas por:

$$\tilde{k} = \tilde{\nabla} \tilde{u} \quad (46)$$

onde $\tilde{\nabla}$ é uma matriz de operadores diferenciais dada por:

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial x & 1 & 0 \\ \partial/\partial y & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Substituindo-se (45) e (47) em (46), obtém-se

$$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{\nabla} \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{d} \quad (48)$$

ou seja:

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{N} \quad (49)$$

ou ainda:

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B}_k + \underset{\sim}{B}_s, \text{ onde}$$

$$\underset{\sim}{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & | & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & | & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & | & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{B}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & | & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & | & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 \end{bmatrix}$$

Tem-se, portanto:

$$\underset{\sim}{k}_k = \underset{\sim}{B}_k \underset{\sim}{d} \quad (50)$$

$$\underset{\sim}{k}_s = \underset{\sim}{B}_s \underset{\sim}{d}$$

- FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL (Π)

$$\Pi = U + V \quad (51)$$

onde: "U" é dada pela expressão (42)

$$V = - \int_S q w \, ds \quad (52)$$

Substituindo-se as expressões (45) e (50) na condição de estacionaridade de Π , obtém-se:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta V = 0$$
$$\delta \tilde{d}^t \int_S \overbrace{\tilde{B}_K^t D_K \tilde{B}_K ds}^{K_K} \tilde{d} + \delta \tilde{d}^t \int_S \overbrace{\tilde{B}_S^t D_S \tilde{B}_S ds}^{K_S} \tilde{d} = \delta \tilde{d}^t \int_S \overbrace{\tilde{N}^t \tilde{p} ds}^{\tilde{f}} \quad (53)$$

onde: $\tilde{p} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Para uma variação arbitrária de " \tilde{d} ", deve-se ter:

$$\underbrace{\left(K_{\tilde{K}} + K_{\tilde{S}} \right)}_{\text{MATRIZ DE RIGIDEZ}} \tilde{d} = \underbrace{\tilde{f}}_{\text{CARREGAMENTO EQUIVALENTE NODAL}} \quad (54)$$

onde:

$$K_{\tilde{K}} = \int_S \tilde{B}_K^t D_K \tilde{B}_K ds$$

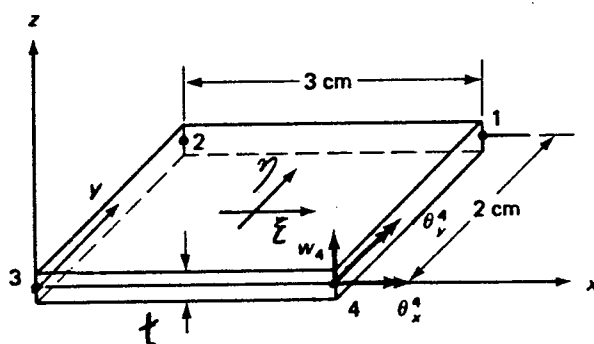
$$K_{\tilde{S}} = \int_S \tilde{B}_S^t D_S \tilde{B}_S ds \quad (55)$$

$$\tilde{f} = \int_S \tilde{N}^t \tilde{p} ds.$$



e) EXERCÍCIO

Obter as expressões da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes, em função das coordenadas locais " ξ e η ", para o elemento de placa indicado na figura abaixo. [BATH82]



RESOLUÇÃO:

Da expressão (54) tem-se:

$$(\underline{K}_K + \underline{K}_S) \underline{d} = \underline{f}$$

onde

$$\underline{K}_K = \int_S \underline{B}_K^t \underline{D}_K \underline{B}_K ds ; \quad \underline{K}_S = \int_S \underline{B}_S^t \underline{D}_S \underline{B}_S ds \quad (56)$$



$$\tilde{D}_k = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad \tilde{D}_s = \begin{bmatrix} KtG & 0 \\ 0 & KtG \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad K = \frac{5}{6}$$

De acordo com as expressões (50) as matrizes " \tilde{B}_k e \tilde{B}_s " são dadas por:

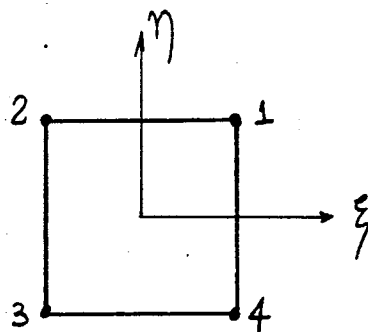
$$B_{\tilde{i}} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_k \\ \tilde{B}_s \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (58)$$

onde "i" representa o ponto nodal "i".

- Determinação das funções de Interpolação (N_i).

- Sistema local

$$\begin{cases} N_1 = \frac{(1+\eta)(1+\xi)}{4} \\ N_2 = \frac{(1+\eta)(1-\xi)}{4} \\ N_3 = \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{4} \\ N_4 = \frac{(1-\eta)(1+\xi)}{4} \end{cases} \quad (59)$$





$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

termos da matriz Jacobiana
Inversa

- Cálculo da Transformação Jacobiana

↳ Adotando-se uma representação isoparamétrica:

$$\begin{cases} x = \sum N_i \bar{x}_i \\ y = \sum N_i \bar{y}_i \end{cases}$$

onde: \bar{x}_i e \bar{y}_i são as
coordenadas dos
pontos nodais

$$x = \frac{1}{4} \left[(1+\eta)(1+\xi)(3) + (1+\eta)(1-\xi)(0) + \right. \\ \left. (1-\eta)(1-\xi)(0) + (1-\eta)(1+\xi)(3) \right]$$

$$x = \frac{3(1+\xi)}{4} (1+\eta + 1-\eta) \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2} (1+\xi)} \quad (60)$$

Analogamente:

$$y = \frac{1}{4} \left[(1+\eta)(1+\xi)(2) + (1+\eta)(1-\xi)(2) + \right. \\ \left. (1-\eta)(1-\xi)(0) + (1-\eta)(1+\xi)(0) \right]$$

$$y = \frac{2(1+\eta)}{4} (1+\xi + 1-\xi) \Rightarrow \boxed{y = (1+\eta)} \quad (61)$$

A matriz Jacobiana é dada por:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\det \underline{J} = 3/2$$

Matriz Jacobiana Inversa:

$$\underline{J}^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

- Cálculo das Derivadas $\partial N_i / \partial x$, $\partial N_i / \partial y$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{(1+\eta)}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(1+\xi)}{4} \cdot 1$$

Analogamente:

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = -\frac{(1+\eta)}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{(1-\xi)}{4} \cdot 1$$



$\frac{\partial N_3}{\partial x} = -\frac{(1-\eta)}{4} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{\partial N_3}{\partial y} = -\frac{(1-\xi)}{4} \cdot 1$	(64)
$\frac{\partial N_4}{\partial x} = \frac{(1-\eta)}{4} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{\partial N_4}{\partial y} = -\frac{(1+\xi)}{4} \cdot 1$	

Portanto

$$\tilde{B}_K = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(1+\eta)}{6} & 0 & 0 & -\frac{(1+\eta)}{6} & 0 & 0 & -\frac{(1-\eta)}{6} & 0 & 0 & \frac{(1-\eta)}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\xi)}{4} & 0 & 0 & \frac{(1-\xi)}{4} & 0 & 0 & -\frac{(1-\xi)}{4} & 0 & 0 & -\frac{(1+\xi)}{4} \\ 0 & \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1+\eta)}{6} & 0 & \frac{(1-\xi)}{4} & -\frac{(1+\eta)}{6} & 0 & -\frac{(1-\xi)}{4} & -\frac{(1-\eta)}{6} & 0 & -\frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\eta)}{6} \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\tilde{B}_S = \begin{bmatrix} \frac{(1+\eta)}{6} & \frac{(1+\eta)(1+\xi)}{4} & 0 & \frac{(1+\eta)}{6} & \frac{(1+\eta)(1-\xi)}{4} & 0 & \frac{(1-\eta)}{6} & \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{4} & 0 & \frac{(1-\eta)}{6} & \frac{(1-\eta)(1+\xi)}{4} & 0 \\ -\frac{(1+\xi)}{4} & 0 & \frac{(1+\eta)(1+\xi)}{4} & -\frac{(1-\xi)}{4} & 0 & \frac{(1+\eta)(1-\xi)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & 0 & \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{4} & \frac{(1+\xi)}{4} & 0 & \frac{(1-\eta)(1+\xi)}{4} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Substituindo-se as expressões (57), (65) e (66) na expressão (56) e transformando-se o sistema de coordenadas "xy" p/ o sistema natural "ξη", obtêm-se:

$$\tilde{K}_K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{B}_K^t \underline{D}_K \tilde{B}_K \det \underline{J} d\xi d\eta \quad (67)$$



Analogamente:

$$\tilde{K}_s = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{B}_s^t \tilde{D}_s \tilde{B}_s \det \tilde{J} d\xi d\eta \quad (68)$$

O carregamento nodal equivalente é dado por:

$$\tilde{f} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{N}^t \tilde{p} \det \tilde{J} d\xi d\eta \quad (69)$$

onde

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & | & \dots & | & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & | & & | & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & | & & | & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\tilde{p} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow "q" = \text{carregamento uniforme distribuído por unidade de área.}$$



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BATH 82] - Bathe, K. J. "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.
- [COOK 89] - Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E. "Concepts and Applications of Finite Element Analysis"; John Wiley & Sons, 3rd edition, 1989.
- [HINT 77] - Hinton, E and Owen, D. R. J., - "Finite Element Programming", Academic Press, Inc., 1977.
- [MART 90] - Martha, L. F., - "Notas de Aula" do curso CIV-2118 - Elementos Finitos, Depto. Eng Civil, PUC-Rio, 1990.
- [ZIEN 77] - Zienkiewicz, O. C. - "The Finite Element Method", McGraw Hill, 3rd Edition, 1977.