

Demonstração de que a linha neutra passa pelo centro de gravidade

Foi mencionado anteriormente que, no caso da flexão simples (sem esforço normal), a linha neutra (linha com valores nulos de tensões normais σ_x) passa pelo centro de gravidade da seção transversal. Agora isso vai ser demonstrado. Para tanto, basta considerar a expressão para distribuição das tensões normais e a condição para flexão simples (esforço normal nulo):

$$\sigma_x = E \frac{-y}{\rho} \quad \text{e} \quad N = \int_A \sigma_x dA = 0.$$

Combinando essas duas expressões chega-se a:

$$\int_A \sigma_x dA = \int_A E \frac{-y}{\rho} dA = -\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_A y dA = 0}$$

A equação $\int_A y dA = 0$ só é satisfeita se a origem do eixo y estiver no centro de gravidade da seção transversal. Isto quer dizer que, para flexão simples, *a linha neutra passa pelo centro de gravidade da seção*, enquanto as tensões normais permanecerem em regime elástico.

Relação entre o momento fletor e a curvatura da viga

Pode-se obter uma relação entre a curvatura $\boxed{1/\rho}$ do eixo da viga (que está associada à sua concavidade) e o momento fletor em uma seção transversal.

Considere as seguintes expressões que foram mostradas anteriormente:

Relação entre momento fletor e tensão normal: $\boxed{M = \int_A (-y) \cdot \sigma_x dA}$

Relação entre tensão normal e curvatura: $\boxed{\sigma_x = E \frac{-y}{\rho}}$

Se a segunda expressão for introduzida na primeira, resulta em:

$$M = \int_A (-y) \cdot E \cdot \frac{-y}{\rho} dA$$

Nesta integral, os parâmetros E (módulo de elasticidade) e $1/\rho$ (curvatura) não variam para uma dada seção transversal. Portanto, estes parâmetros podem entrar multiplicando a integral externamente:

$$M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

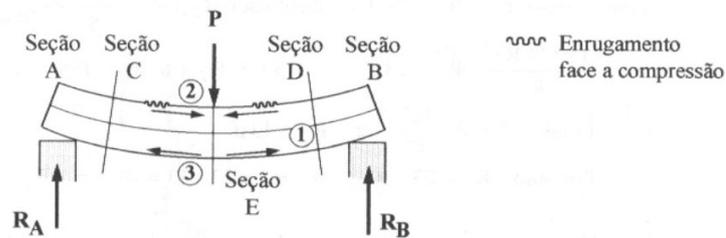
Observe que os dois sinais negativos de y se cancelaram. A integral que aparece na expressão acima é uma propriedade geométrica associada à seção transversal que é denominada *momento de inércia*:

$$\boxed{I = \int_A y^2 dA}$$

Finalmente, chega-se a uma relação entre o momento fletor e a curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

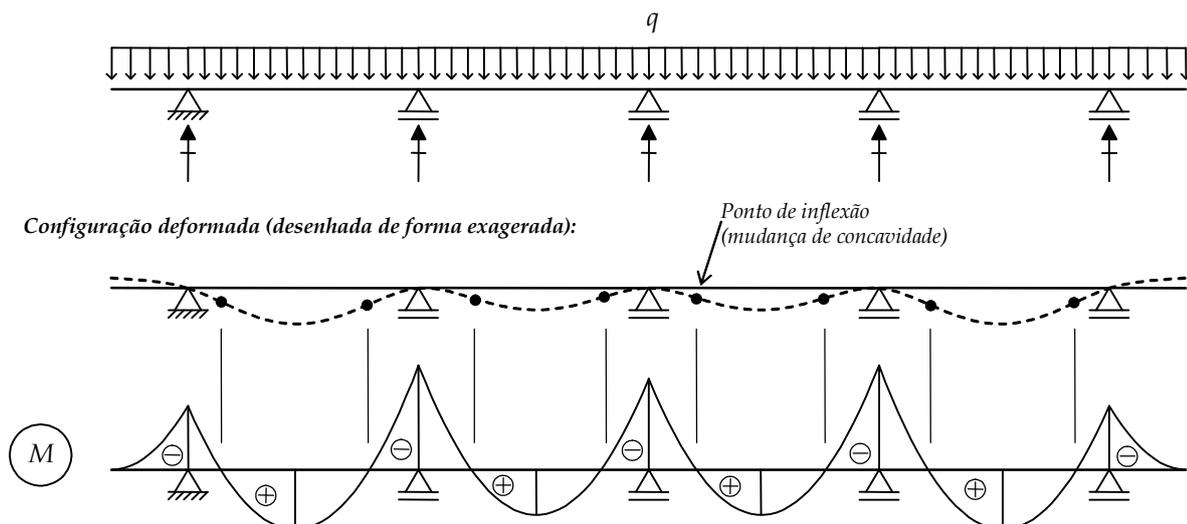
A análise desta relação resulta em importantes conclusões sobre o comportamento de vigas submetidas a cargas transversais. Conforme mencionado anteriormente, quando o momento fletor é positivo ($M > 0$), as fibras superiores da seção transversal são comprimidas e as fibras inferiores são tracionadas. Isto está associado a uma deformação da viga com a concavidade para cima.



Para momentos fletores negativos ($M < 0$), o inverso ocorre: a viga tem uma deformação com concavidade para baixo, as fibras superiores da seção transversal são tracionadas e as fibras inferiores são comprimidas.

Pode-se concluir que nas seções transversais onde o momento fletor tiver um valor nulo ($M = 0$), a curvatura (concavidade) é nula. Isto é, para $M = 0$, $(1/\rho) = 0$. De fato, quando uma barra não tem momento fletor (e por conseguinte também não tem esforço cortante), ela se deforma sem curvatura, isto é, mantendo-se reta. Esse é justamente o caso de barras de treliça, que só têm esforço normal.

A figura abaixo mostra a configuração deformada e o digrama de momentos fletores de uma viga contínua submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída.



Repare que nos trechos onde o momento fletor é negativo a concavidade é para baixo e nos trechos onde o momento fletor é positivo a concavidade é para cima. Nos pontos onde o momento fletor se anula há uma mudança de concavidade. Estes pontos são chamados de pontos de *inflexão*.

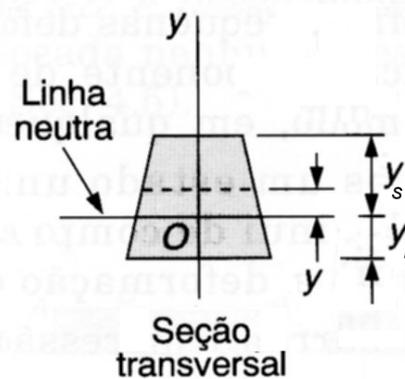
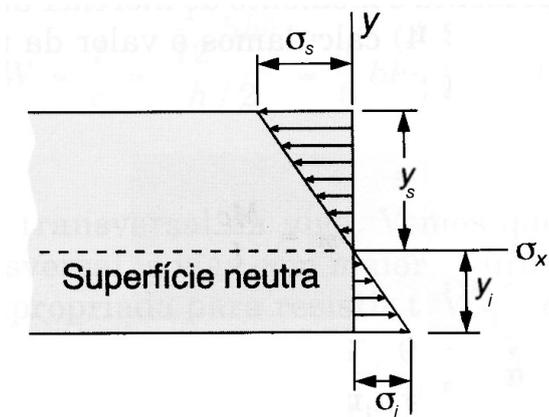
Relação entre tensão normal e momento fletor

Utilizando a relação entre a tensão normal e a curvatura e a relação entre o momento fletor e a curvatura, chega-se a uma relação direta entre a tensão normal e o momento fletor:

$$\sigma_x = E \frac{-y}{\rho} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I}}$$

Com base nesta expressão pode-se determinar a tensão no bordo inferior e a tensão no bordo superior de uma seção transversal submetida a um momento fletor:

$$\boxed{\sigma_i = \frac{M \cdot y_i}{I}} \quad \text{e} \quad \boxed{\sigma_s = -\frac{M \cdot y_s}{I}}$$



Sendo y_i e y_s as máximas distâncias dos bordos inferior e superior à linha neutra, respectivamente.

Os sinais dessas expressões estão consistentes com a convenção de sinais para momentos fletores. Isto é, momentos fletores positivos estão associados à tração (tensão normal positiva) das fibras inferiores ($y < 0$) da viga e à compressão (tensão normal negativa) das fibras superiores ($y > 0$):

$$M > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i > 0 & \text{para } y < 0 \\ \sigma_s < 0 & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

E momentos fletores negativos estão associados à compressão das fibras inferiores e à tração das fibras superiores.

$$M < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_i < 0 & \text{para } y < 0 \\ \sigma_s > 0 & \text{para } y > 0 \end{cases}$$

Vê-se nas expressões mostradas acima para σ_i e σ_s que as tensões nos bordos inferior e superior só dependem do valor momento fletor M das relações geométricas y_i/I e y_s/I . Estas relações só dependem da geometria da seção transversal e são chamadas de *módulos de resistência à flexão* da seção transversal:

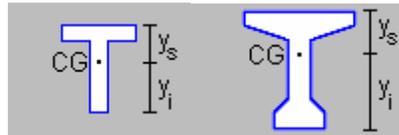
$$\boxed{W_i = \frac{I}{y_i}} \quad (\text{módulo de resistência inferior})$$

$$\boxed{W_s = \frac{I}{y_s}} \quad (\text{módulo de resistência superior})$$

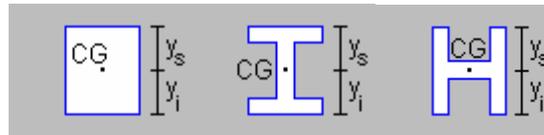
Dessa forma, as tensões nos bordos inferior e superior da seção transversal ficam determinadas pelas expressões:

$$\sigma_i = \frac{M}{W_i} \quad \text{e} \quad \sigma_s = -\frac{M}{W_s}$$

No caso geral, os valores dessas tensões são diferentes pois a distância do centro do centro de gravidade da seção transversal aos dois bordos é diferente, como nas seções do tipo T mostradas abaixo:



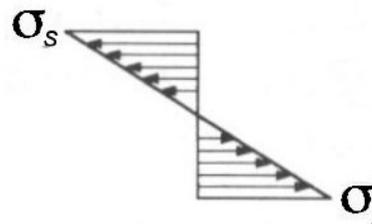
No caso de seções transversais simétricas em relação à linha neutra, isto é, nas quais o centro de gravidade se situa na metade da altura da seção, tem-se que $y_i = y_s$ e, portanto, $W_i = W_s$. Isso ocorre, por exemplo, em seções transversais retangulares ou em perfis I ou H:



Para essas seções, as tensões nos bordos inferior e superior são iguais em módulo, isto é:

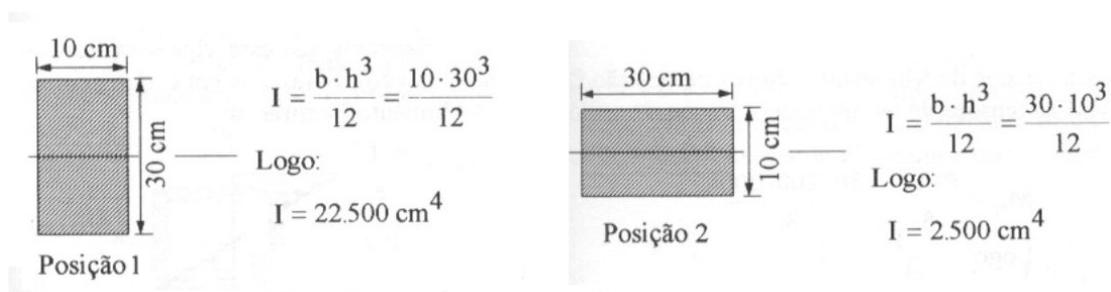
$$W = W_i = W_s.$$

$$|\sigma_i| = |\sigma_s| = \frac{M}{W}$$



Influência do momento de inércia da seção transversal

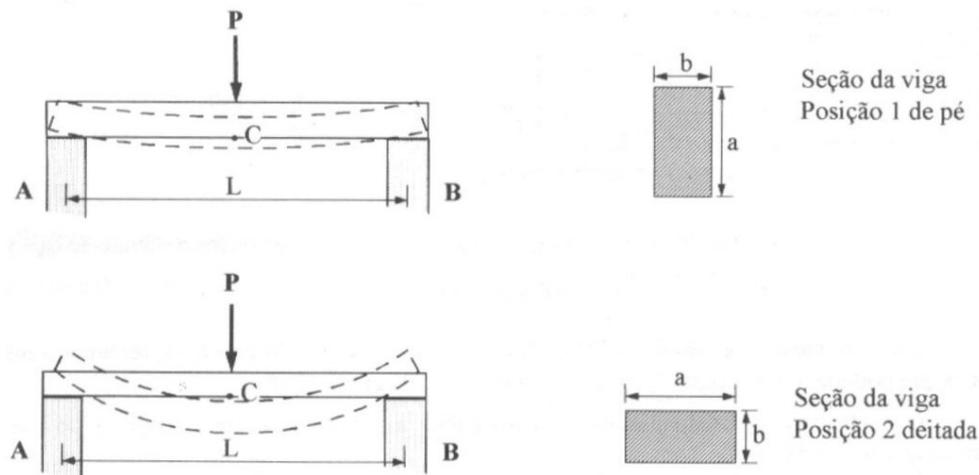
O momento de inércia da seção transversal é uma propriedade geométrica que depende de sua orientação com respeito ao plano onde ocorre a flexão da barra. Tome, por exemplo, a seção retangular mostrada abaixo.



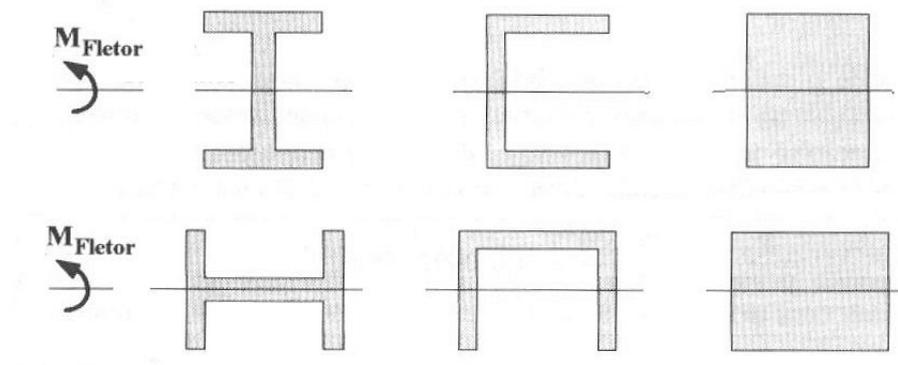
De uma maneira geral, o momento de inércia para esta seção é $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$, sendo b a base e h a altura do retângulo.

O momento de inércia para a posição 1 (viga em pé) é maior do que o momento de inércia para a posição 2 (viga deitada), pois no primeiro caso a altura h tem o maior valor.

Portanto, a orientação da viga é importante para a sua resistência à flexão. Uma viga biapoiada com a seção em pé vai apresentar flexões menores (menores curvaturas) do que a mesma viga com a seção deitada.

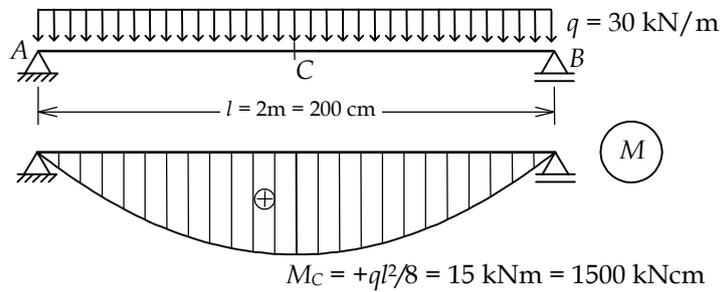


As orientações das seções da primeira linha abaixo são mais resistentes do que as orientações da segunda linha:



Exemplo de determinação de tensões máximas para uma viga biapoiada

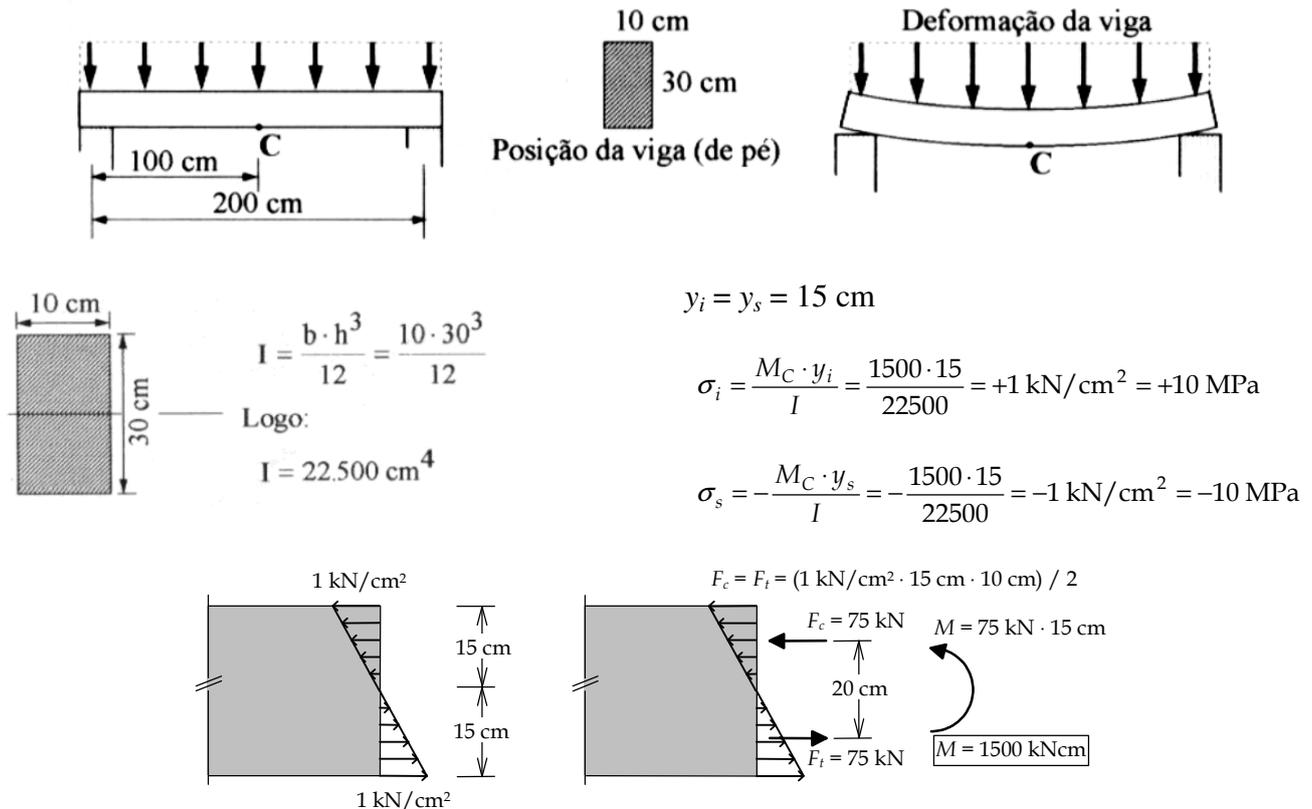
Considere uma viga biapoiada de madeira de 2 metros de vão, com uma seção transversal retangular de 10 x 30 cm, sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 30 kN/m.



O momento fletor máximo na viga ocorre na seção central C e o valor é $M_C = +1500 \text{ kNcm}$ (tracionando as fibras inferiores). As tensões normais máximas ocorrem na seção central, pois correspondem ao valor máximo do momento fletor. Como a seção é retangular, a tensão no bordo inferior (de tração) é igual em módulo à tensão no bordo superior (de compressão).

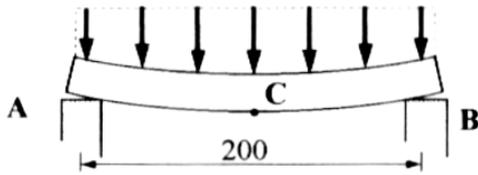
Os valores das tensões máximas dependem do posicionamento da seção transversal. Duas situações serão estudadas: viga em pé e viga deitada.

Posição 1: viga em pé

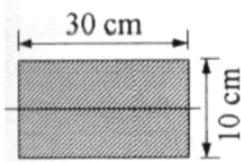
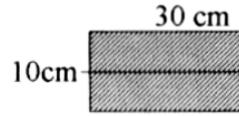


É interessante observar que a resultante F_t das tensões de tração e a resultante F_c das tensões de compressão ao longo da seção transversal são iguais em valor e têm sentido contrário. Isto está associado ao fato do esforço normal ser nulo na seção transversal: $N = \int \sigma_x dA = 0$. Outro fato interessante é que o momento formado pelas resultantes F_t e F_c , com um braço de alavanca de 20 cm, é igual ao valor do momento fletor M_C na seção transversal.

Posição 2: viga deitada



Seção da viga (posição da viga deitada)



$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30 \cdot 10^3}{12}$$

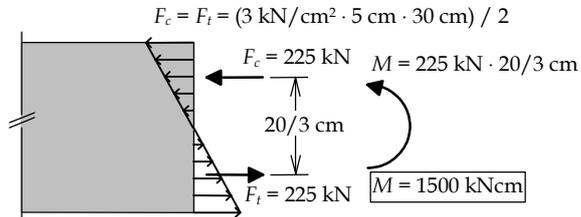
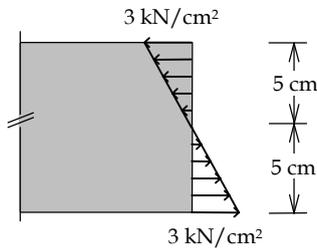
Logo:

$$I = 2.500 \text{ cm}^4$$

$$y_i = y_s = 5 \text{ cm}$$

$$\sigma_i = \frac{M_C \cdot y_i}{I} = \frac{1500 \cdot 5}{2500} = +3 \text{ kN/cm}^2 = +30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = -\frac{M_C \cdot y_s}{I} = -\frac{1500 \cdot 5}{2500} = -3 \text{ kN/cm}^2 = -30 \text{ MPa}$$

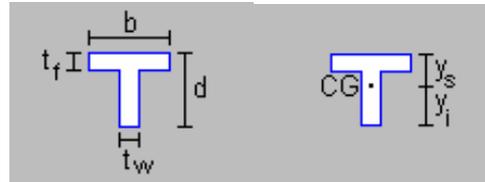
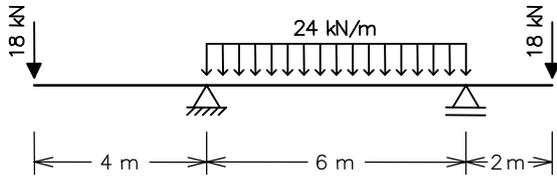


As seguintes conclusões podem ser obtidas da comparação entre a análise da viga de madeira em pé e deitada:

- O posicionamento da viga deitada apresenta uma curvatura maior do que para o caso da viga em pé.
- O posicionamento da viga deitada apresenta tensões normais maiores do que para o caso da viga em pé.
- As resultantes de tensões de tração e de compressão são maiores para a viga deitada.
- O momento resultante das tensões de tração e de compressão é igual para a viga em pé e para a viga deitada, e é igual ao momento fletor na seção transversal.
- No caso da viga deitada, o braço de alavanca entre as resultantes de tração e compressão é menor do que para a viga em pé. Este é o motivo pelo qual na viga deitada se desenvolvem maiores tensões normais, pois o momento resultante tem que ser sempre igual ao momento fletor na seção.

Exemplo de determinação de tensões máximas para uma viga biapoçada com balanços e seção transversal do tipo T

Considere a viga mostrada abaixo. A seção transversal também está indicada.



Os parâmetros que definem as dimensões da seção transversal são:

$d = 50$ cm (altura da seção)

$t_w = 12$ cm (largura da alma)

$b = 40$ cm (largura da mesa)

$t_f = 10$ cm (espessura da mesa)

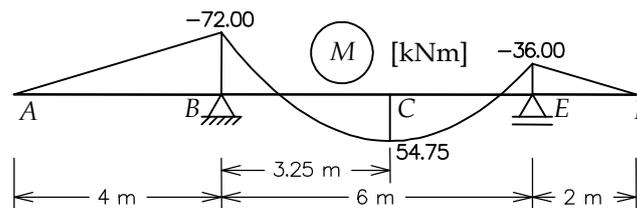
O momento de inércia e as distâncias dos bordos ao centro de gravidade são:

$I = 203697$ cm⁴

$y_i = 31.4$ cm

$y_s = 18.6$ cm

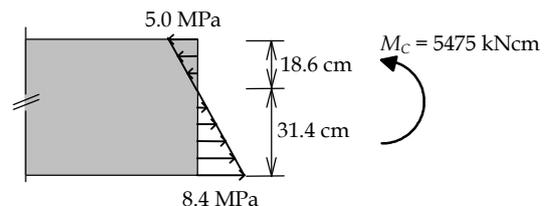
O diagrama de momentos fletores da viga está mostrado abaixo, sendo que o momento fletor máximo positivo é $M_C = + 54.75$ kNm = + 5475 kNcm e o momento fletor máximo negativo é $M_B = - 72$ kNm = - 7200 kNcm:



Tensões normais na seção C:

$$\sigma_s = -\frac{M_C \cdot y_s}{I} = -\frac{5475 \cdot 18.6}{203697} = -0.50 \text{ kN/cm}^2 = -5.0 \text{ MPa}$$

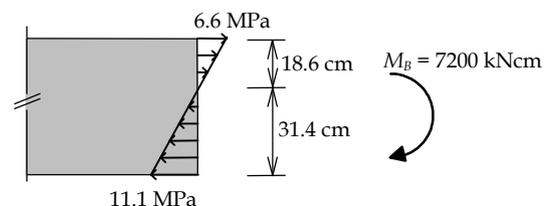
$$\sigma_i = \frac{M_C \cdot y_i}{I} = \frac{5475 \cdot 31.4}{203697} = +0.84 \text{ kN/cm}^2 = +8.4 \text{ MPa}$$



Tensões normais na seção B:

$$\sigma_s = -\frac{M_B \cdot y_s}{I} = -\frac{-7200 \cdot 18.6}{203697} = +0.66 \text{ kN/cm}^2 = +6.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_i = \frac{M_B \cdot y_i}{I} = \frac{-7200 \cdot 31.4}{203697} = -1.11 \text{ kN/cm}^2 = -11.1 \text{ MPa}$$



Um possível critério de dimensionamento seria comparar a máxima tensão normal obtida (11.1 MPa) com o valor da tensão admissível do material utilizado. Se ultrapassasse, seria necessário redimensionar a seção transversal, provavelmente aumentando a sua altura, de forma a aumentar o momento de inércia da seção e o braço de alavanca entre as resultantes de tração e de compressão na seção.