

G1-Q1: Simulação computacional do Método das Forças

1ª Questão do Grau G1 (1,5 pontos) – Data da entrega: 31/08/2020

Obtenha o programa Ftool e seu manual em “<http://www.ftool.com.br>”. Estude o exemplo de solução de um pórtico com dois hiperestáticos pelo Método das Forças da “Aula 02: Introdução ao Método das Forças” no site da disciplina no Ambiente de Aprendizagem Online da PUC-Rio: “<https://ead.puc-rio.br/login/index.php>”. Assista o vídeo “Aula 02 - Introdução ao Método das Forças”. Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

Item (a) – Estrutura original a ser resolvida

Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano hiperestático com grau de hiperestaticidade no mínimo igual a quatro ($g \geq 4$) e que não contenha ciclos fechados de barras. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de reação de apoio indicadas. Anote nessa figura as componentes de reações de apoio que serão escolhidas como incógnitas da solução da estrutura pelo Método das Forças. Estas incógnitas são chamadas de *hiperestáticos* e devem ser identificadas pelo nome X_j , sendo j o número do hiperestático. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os hiperestáticos com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das reações de apoio (com sinal) selecionadas como incógnitas do problema para usar no item (f).

Item (b) – Sistema Principal

Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) associados aos hiperestáticos escolhidos no item (a). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças. Crie uma figura com o SP adotado e os hiperestáticos com seus nomes. Embora seja possível, neste trabalho não libere vínculos internos, isto é, não introduza rótulas.

Item (c) – Caso básico (0)

Para o Sistema Principal do item (b) considere valores nulos para os hiperestáticos e aplique o carregamento externo do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método das Forças. Mostre a configuração deformada dessa estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos termos de carga δ_0 . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

Item (d) – Casos básicos que isolam os hiperestáticos

Retire as cargas utilizadas no item (c) e carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos com valores unitários. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos (j) do Método das Forças, onde j é o número de um hiperestático. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações (com valores, sinais e unidades) nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *coeficientes de flexibilidade* δ_j . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de flexibilidade à mão.

Item (e) – Sistema de equações de compatibilidade

Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade.

Item (f) – Verificação da solução do sistema de equações de compatibilidade

Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de compatibilidade obtido no item (e).

Item (g) – Obtenção de esforços internos

Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de compatibilidade que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método das Forças.

G1-Q2: Escolha do SP e interpretação física do termos de carga e coeficientes de flexibilidade

2ª Questão do Grau G1 (1,0 ponto) - Data da entrega: 09/09/2020

Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório.

Item (a) - Estrutura original

- Defina arbitrariamente um pórtico plano hiperestático com grau de hiperestaticidade no mínimo igual a três ($g \geq 3$) e mostre em uma figura.
- Indique dimensões, apoios, rótulas (não obrigatório), propriedades de material, propriedades de seção transversal e carregamento.
- Todos os parâmetros têm de ser indicados com valores e unidades consistentes. Escolha unidades e valores adequados.
- O carregamento deve ter pelo menos uma força concentrada aplicada em um nó livre (sem apoios) e pelo menos uma força uniformemente distribuída aplicada em qualquer trecho.

Item (b) - Sistema Principal e hiperestáticos

- Defina um possível Sistema Principal (SP) para a resolução do pórtico hiperestático definido no item (a) pelo Método das Forças. O SP é uma estrutura isostática obtida da estrutura hiperestática original a partir da eliminação de vínculos.
- Pelo menos um vínculo externo deve ser liberado (liberação de restrição de apoio) e pelo menos um vínculo de continuidade interna deve ser liberado.
- Mostre o SP adotado em uma figura e indique os hiperestáticos associados.
- Cada hiperestático é identificado pela seguinte notação: X_i , em que i é o seu índice.
- Para cada hiperestático, indique se é um esforço externo (reação de apoio) ou um esforço interno.
- Se for um esforço externo, indique se o hiperestático é uma força horizontal, uma força vertical ou um momento.
- Se for um esforço interno, indique se o hiperestático é um esforço axial (normal), um esforço cortante ou um momento fletor.
- Para cada hiperestático, indique sua unidade.

Item (c) - Caso básico (0)

- Mostre a configuração deformada do caso básico (0) da solução do pórtico escolhido e indique em uma figura os termos de carga.
- Cada termo de carga é identificado pela seguinte notação: δ_{i0} , em que i é o seu índice.
- Descreva as interpretações físicas dos termos de carga do caso (0) associados ao SP adotado:
 - Para cada termo de carga, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento axial, um deslocamento vertical, um deslocamento transversal ou uma rotação.
 - Para cada termo de carga, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.
 - Para cada termo de carga, indique qual foi o efeito que o provocou.
 - Para cada termo de carga, indique sua unidade.

Item (d) - Demais casos básicos que isolam os efeitos dos hiperestáticos

- Para caso básico (j) da solução do pórtico escolhido, em que j é o índice do hiperestático correspondente, mostre a configuração deformada em uma figura e indique na figura os coeficientes de flexibilidade do caso básico.
- Cada coeficiente de flexibilidade é identificado pela seguinte notação: δ_{ij} , em que i e j são seus índices.
- Descreva as interpretações físicas de todos os coeficientes de flexibilidade associados ao SP adotado:
 - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é um deslocamento horizontal, um deslocamento axial, um deslocamento vertical, um deslocamento transversal ou uma rotação.
 - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique se é uma grandeza absoluta ou relativa.
 - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique qual foi o efeito que o provocou.
 - Para cada coeficiente de flexibilidade, indique sua unidade.

Item (e) - Sistema de equações de compatibilidade

Mostre literalmente (sem valores numéricos) as equações de compatibilidade resultantes da solução do modelo estrutural escolhido pelo Método das Forças de acordo com o SP adotado. Escreva o que cada equação de compatibilidade impõe.

ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2020

Grau G1 – 3ª Questão – Entrega: 21/09/2020 até 9:00 hs (não serão aceitas respostas depois desse dia e horário)

A solução da 3ª Questão do grau G1 deve ser entregue em um arquivo em formato PDF com os seguinte nome: **ENG1204-202-G1-Q3-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno.

Leia com atenção as instruções abaixo e os enunciados dos itens da questão.

As respostas devem ser feitas como um relatório da memória de cálculo. A qualidade da apresentação vai ser considerada na avaliação da resposta.

As soluções podem ser feitas à mão em papel e digitalizadas, criadas digitalmente através de algum editor de texto, ou por uma combinação de trechos e desenhos feitos à mão e digitalizados com trechos editados digitalmente.

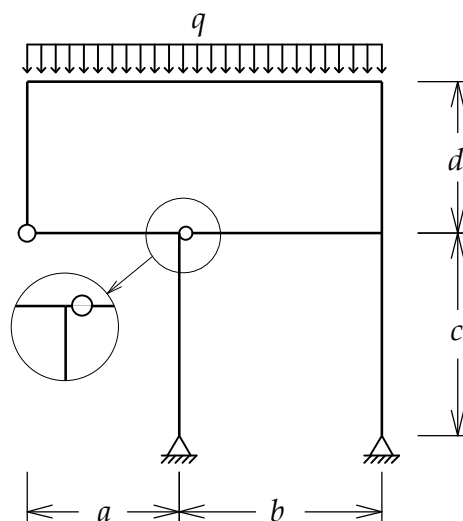
Cada aluna ou aluno tem um conjunto de valores para as dimensões do pórtico e carregamento aplicado. Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

3ª Questão (4,5 pontos)

Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores para o pórtico plano da figura ao lado.

Todos os passos da solução têm de ser indicados.

Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma rigidez à flexão $EI = 1.2 \times 10^5 \text{ kNm}^2$.



Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	q [kN/m]
1511292	3	3	6	5	8
1511561	4	4	5	4	12
1512423	5	5	4	3	16
1512618	6	6	3	6	24
1520208	3	4	5	4	8
1520955	4	5	4	3	12
1521044	5	6	3	6	16
1521066	6	3	6	5	24
1611768	3	5	4	3	8
1612011	4	6	3	6	12
1612648	5	3	6	5	16
1612752	6	4	5	4	24
1621373	3	6	3	6	8
1712112	4	3	6	5	12
1712989	5	4	5	4	16
1810339	6	5	4	3	24
1810501	3	6	3	4	8
1810989	4	5	4	5	12
1811351	5	4	5	6	16
1812121	6	3	6	3	24
1920621	3	5	4	5	8

Sugere-se que o programa Ftool seja utilizado tanto para auxiliar nos cálculos quanto para geração de figuras das soluções.

Opções de configuração no Ftool:

Unidades gerais adotadas: [kN-m] (configure utilizando a opção *Units & Number Formatting...* do menu *Options*).

Unidade para distâncias: [m]; número de casas decimais para distâncias: 0 (nenhuma casa decimal).

Unidade para forças: [kN]; número de casas decimais para forças: 2.

Unidade para momentos: [kNm]; número de casas decimais para momentos: 2.

Unidade para forças distribuídas: [kN/m]; número de casas decimais para forças distribuídas: 0.

Valor e unidade do módulo de elasticidade (E) do material (*Generic Isotropic*) para todas as barras: 10^8 kN/m² (1.0e+08 kN/m²). O demais parâmetros de material não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default*.

Parâmetros de seção transversal (*Generic/Integral Properties*) para todas as barras:

Valor e unidade da área da seção transversal (A): 0.012 m².

Valor e unidade do momento de inércia da seção transversal (I): 0.0012 m⁴.

O demais parâmetros de seção transversal não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default* nulos.

Todas as barras dos modelos estruturais são consideradas sem deformação axial e se deformação por cisalhamento (efeito cortante). Para configurar isso no Ftool, no menu *Deformation Constraints* selecione *Flexible Member* e deixe as opções *Axial Deformation* and *Shear Deformation* NÃO selecionadas. Aplique isso para todas as barras.

Item (3.a) – Sistema Principal (0,5 ponto)

Obtenha uma estrutura isostática a partir da eliminação dos vínculos externos (liberação de restrições de apoio) e/ou vínculos internos de continuidade de rotação (introdução de rótulas). Essa estrutura será o Sistema Principal (SP) para a resolução do quadro original hiperestático pelo Método das Forças.

O SP e os hiperestáticos associados aos vínculos eliminados devem ser indicados pelo nome X_j , sendo j o número do hiperestático, através de figuras de duas maneiras:

(3.a.1) Pórtico isostático composto com hiperestáticos indicados.

(3.a.2) Decomposição do pórtico isostático composto em uma sequência de carregamento de pórticos isostáticos simples (biapoiados, triarticulados, e engastados com balanço), com hiperestáticos indicados. Nessa figura, a sequência de carregamento deve ser indicada através de apoios fictícios e de setas que mostram a maneira como um pórtico isostático simples secundário é suportado por outro pórtico isostático simples relativamente principal.

Item (3.b) – Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no Sistema Principal (1,0 ponto)

(3.b.1) Mostre em uma figura a configuração deformada do caso (0) com escala de deslocamentos exagerada, indicando as componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *termos de carga*, com nomes δ_i , sendo i o número do hiperestático correspondente. Os termos de carga devem ser indicados na figura pelos seus nomes. Não precisa indicar valor ou unidade.

(3.b.2) Mostre em uma figura, juntamente com a solicitação externa, as reações de apoio para o caso básico (0), com valores e unidades, nos apoios fictícios e nos apoios originais do pórtico isostático decomposto.

(3.b.3) Mostre em uma figura o diagrama de momentos fletores do caso (0). O diagrama pode ser indicado no pórtico isostático composto do SP ou nos pórticos isostáticos simples resultantes da decomposição deste. A unidade dos momentos fletores deve ser indicada. O diagrama deve ser traçado desenhando as ordenadas do lado da fibra tracionada em cada seção transversal. Os valores dos momentos fletores devem ser indicados nas extremidades de todas as barras e, para as barras carregadas, o diagrama de momento fletor para o carregamento de viga biapoiada da barra deve ser indicado “pendurado” a partir da linha reta que une os valores das extremidades da barra. Não precisa indicar o sinal dos valores dos momentos fletores no diagrama.

Item (3.c) – Casos básicos dos hiperestáticos isolados no Sistema Principal (1,5 pontos)

Carregue o Sistema Principal, alternadamente, com os hiperestáticos com valores unitários. Isto deve gerar um caso de carregamento para cada hiperestático (com valor unitário) atuando independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos básicos (j) do Método das Forças, onde j é o número de um hiperestático.

(3.c.1) Mostre figuras com a configuração deformada do SP, com escala de deslocamentos exagerada, para cada um dos hiperestáticos unitários impostos, indicando as componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *coeficientes*

de flexibilidade, com nomes δ_j . Os coeficientes de flexibilidade devem ser indicados na figuras pelos seus nomes. Não precisa indicar valor ou unidade.

(3.c.2) Mostre em figuras as reações nos apoios fictícios e nos apoios originais do pórtico isostático decomposto provocadas pelos hiperestáticos com valores unitários em cada caso básico (j). O hiperestático com valor unitário deve ser indicado em cada uma dessas figuras.

(3.c.3) Mostre em figuras os diagramas de momentos fletores dos casos básicos (j). Os diagramas podem ser indicados no pórtico isostático composto do SP ou nos pórticos isostáticos simples resultantes da decomposição deste. Os diagramas devem ser traçados desenhando as ordenadas do lado da fibra tracionada em cada seção transversal. Os valores dos momentos fletores devem ser indicados nas extremidades de todas as barras. Não precisa indicar o sinal dos valores dos momentos fletores nos diagramas.

Item (3.d) – Sistema de equações de compatibilidade (1,0 ponto)

Com base nos resultados da 3ª Questão e do item anterior desta questão, monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças. Os valores numéricos dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade deste sistema de equações devem ser calculados utilizando o Princípio das Forças Virtuais (PFV), considerando apenas a parcela de energia de deformação por flexão. O sistema de equações de compatibilidade não precisa ser resolvido. Com base nos resultados da estrutura hiperestática original, indique os valores dos hiperestáticos, com sinal e unidades. Demonstre que os valores dos hiperestáticos correspondem realmente à solução do sistema de equações de compatibilidade.

Item (3.e) – Momentos fletores finais (0,5 ponto)

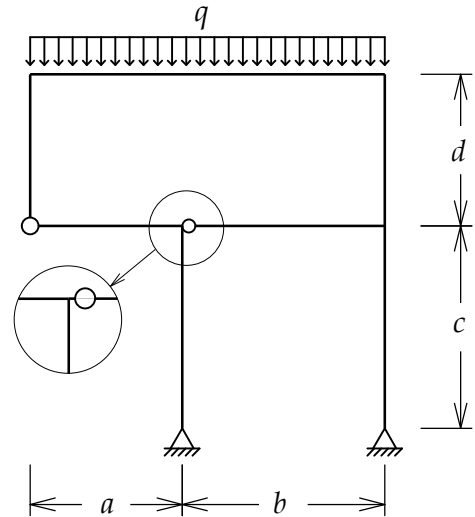
Mostre em uma figura o diagrama de momentos fletores do pórtico hiperestático original. Selecione um valor do diagrama de momentos fletores que recebe influência do caso básico (0) e de todos os demais casos básicos. Demonstre que este valor é obtido pela superposição dos valores correspondentes de cada um dos casos básicos, considerando os valores dos hiperestáticos com sinais.

ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2020
Grau G1 - 3ª Questão

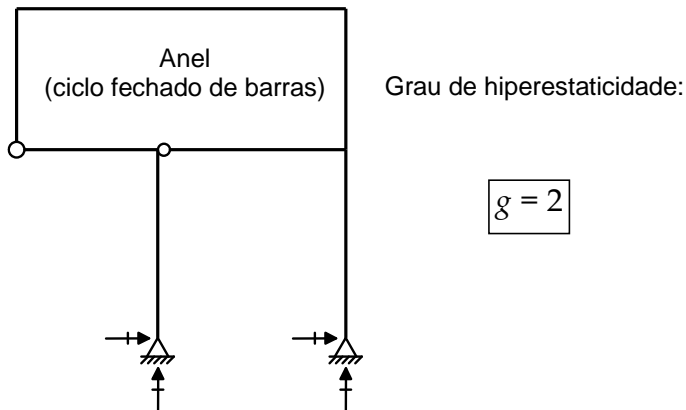
Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores para o pórtico plano da figura ao lado.

Todos os passos da solução têm de ser indicados.

Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma rigidez à flexão $EI = 1.2 \times 10^5 \text{ kNm}^2$.



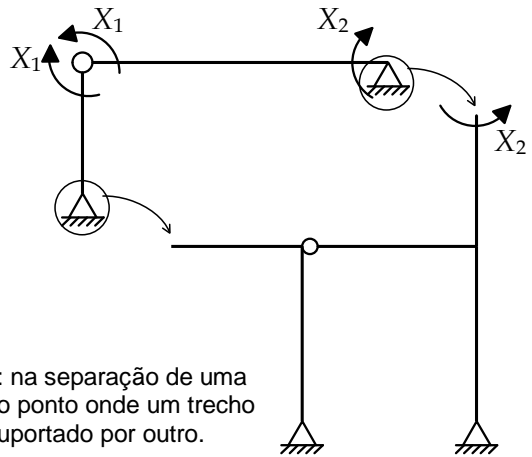
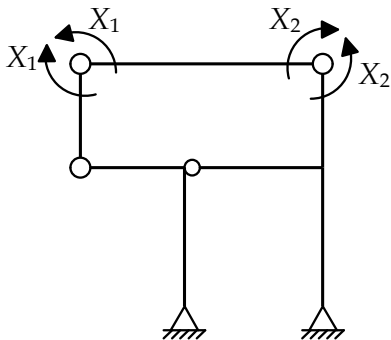
Determinação do grau de hiperestaticidade




- Número de equações de equilíbrio: 5
 - 3 equações globais de equilíbrio
 - 2 equações de momento fletor nulo em rótula (uma equação para cada rótula)
- Número de incógnitas do problema do equilíbrio estático: 7
 - 4 componentes de reação de apoio
 - 3 incógnitas do anel (ciclo fechado de barras)

Sistema Principal adotado

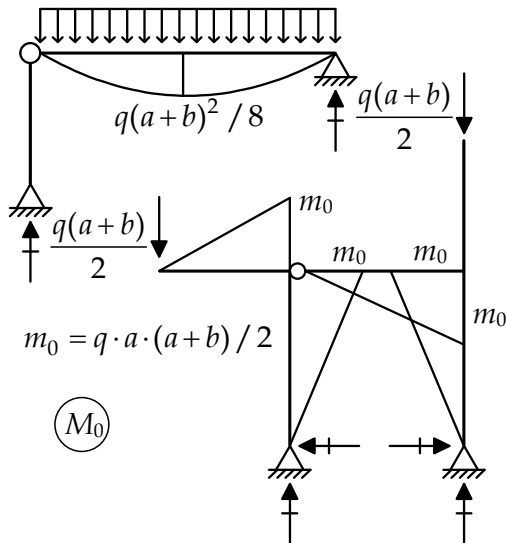
Decomposição ACÍCLICA na sequência de carregamento



 Apoio fictício: na separação de uma rótula indica o ponto onde um trecho está sendo suportado por outro.

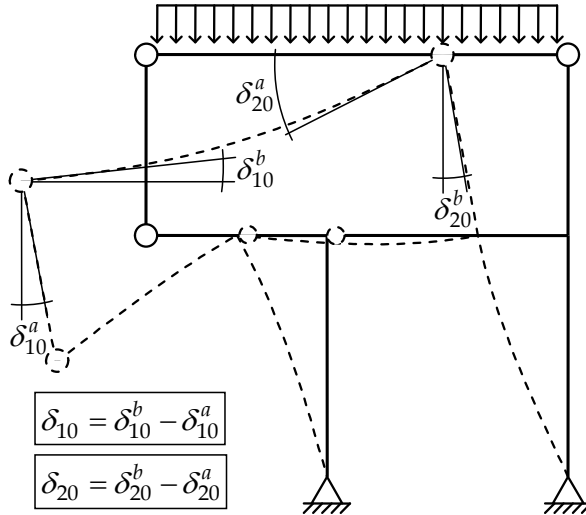
Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP

Diagrama de momentos fletores



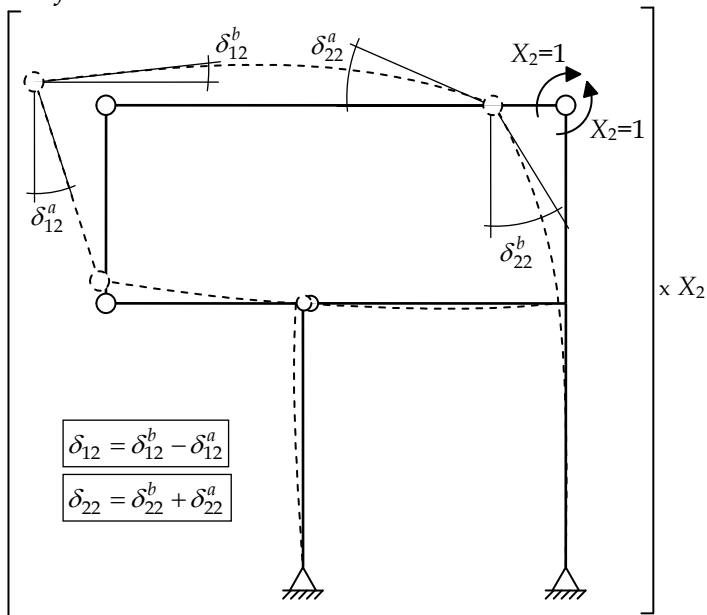
Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP

Configuração deformada



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP

Configuração deformada



Solução de pórtico plano pelo Método das Forças

Equações de compatibilidade

Termos de carga:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \quad \delta_{i0} = \int_{\text{estrutura}} \frac{M_i M_0}{EI} dx = \sum_{\text{barras}} \left[\frac{1}{EI} \int_{\text{barra}} M_i M_0 dx \right]$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot q \frac{(a+b)^2}{8} \cdot (a+b) + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot q \cdot a \frac{a+b}{2} \cdot a \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot q \cdot a \frac{a+b}{2} \cdot b + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot q \cdot a \frac{a+b}{2} \cdot c \right) \right] \quad \delta_{10} = \frac{q}{3EI} \cdot \left[-\frac{(a+b)^3}{8} + \frac{a^3}{2} - \frac{ab^2}{2} + a^2c \right]$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot q \frac{(a+b)^2}{8} \cdot (a+b) - \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot q \cdot a \frac{a+b}{2} \cdot a \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot q \cdot a \frac{a+b}{2} \cdot b - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot q \cdot a \frac{a+b}{2} \cdot c \right) \right] \quad \delta_{20} = \frac{q}{3EI} \cdot \left[-\frac{(a+b)^3}{8} - \frac{a^3}{2} + \frac{ab^2}{2} - a^2c \right]$$

Unidade dos termos de carga: [rad].

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	q [kN/m]	δ_{10} [x10 ⁻³]	δ_{20} [x10 ⁻³]
1511292	3	3	6	5	8	0.6000	-1.8000
1511561	4	4	5	4	12	0.5333	-4.8000
1512423	5	5	4	3	16	-1.1111	-10.0000
1512618	6	6	3	6	24	-7.2000	-21.6000
1520208	3	4	5	4	8	-0.1861	-1.7194
1520955	4	5	4	3	12	-1.5042	-4.5708
1521044	5	6	3	6	16	-5.2833	-9.5056
1521066	6	3	6	5	24	13.7250	-25.8750
1611768	3	5	4	3	8	-1.1556	-1.6889
1612011	4	6	3	6	12	-3.9000	-4.4333
1612648	5	3	6	5	16	5.6000	-11.2889
1612752	6	4	5	4	24	7.6667	-24.3333
1621373	3	6	3	6	8	-2.3250	-1.7250
1712112	4	3	6	5	12	2.2375	-5.0958
1712989	5	4	5	4	16	2.5056	-10.6056
1810339	6	5	4	3	24	0.7083	-22.8917
1810501	3	6	3	4	8	-2.3250	-1.7250
1810989	4	5	4	5	12	-1.5042	-4.5708
1811351	5	4	5	6	16	2.5056	-10.6056
1812121	6	3	6	3	24	13.7250	-25.8750
1920621	3	5	4	5	8	-1.1556	-1.6889

Solução pelo Método das Forças

Coefficientes de flexibilidade

$$\delta_{ij} = \int_{\text{estrutura}} \frac{M_i M_j}{EI} dx = \sum_{\text{barras}} \left[\frac{1}{EI} \int_{\text{barra}} M_i M_j dx \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (a+b) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot d \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot a \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot b + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot c \right) \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{3EI} \cdot \left[a+b+2d + \frac{a^3+b^3+2a^2c}{(a+b)^2} \right]$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (a+b) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot d - \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot a \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot b - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot c \right) \right]$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{3EI} \cdot \left[\frac{a+b}{2} - \frac{3d}{2} - \frac{a^3+b^3+2a^2c}{(a+b)^2} \right]$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (a+b) + 1 \cdot 1 \cdot d + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot a \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot b + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot c \right) \right]$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3EI} \cdot \left[a+b+3d + \frac{a^3+b^3+2a^2c}{(a+b)^2} \right]$$

Unidade dos coeficientes de flexibilidade: [rad/kNm].

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	δ_{11} [x10 ⁻⁵]	$\delta_{12} = \delta_{21}$ [x10 ⁻⁵]	δ_{22} [x10 ⁻⁵]
1511292	3	3	6	5	5.6944	-2.5000	7.0833
1511561	4	4	5	4	5.6944	-1.8056	6.8056
1512423	5	5	4	3	5.6944	-1.1111	6.5278
1512618	6	6	3	6	7.9167	-2.0833	9.5833
1520208	3	4	5	4	5.1927	-1.7205	6.3039
1520955	4	5	4	3	5.2538	-1.0871	6.0871
1521044	5	6	3	6	7.5161	-2.0994	9.1827
1521066	6	3	6	5	7.5926	-3.1481	8.9815
1611768	3	5	4	3	4.8611	-1.1111	5.6944
1612011	4	6	3	6	7.1556	-2.1556	8.8222
1612648	5	3	6	5	6.9618	-2.9340	8.3507
1612752	6	4	5	4	6.7778	-2.0556	7.8889
1621373	3	6	3	6	6.8519	-2.2685	8.5185
1712112	4	3	6	5	6.3265	-2.7154	7.7154
1712989	5	4	5	4	6.2277	-1.9222	7.3388
1810339	6	5	4	3	6.1662	-1.1662	6.9995
1810501	3	6	3	4	5.7407	-1.4352	6.8519
1810989	4	5	4	5	6.3649	-1.9204	7.7538
1811351	5	4	5	6	7.3388	-2.7555	9.0055
1812121	6	3	6	3	6.4815	-2.3148	7.3148
1920621	3	5	4	5	5.9722	-1.9444	7.3611

Solução pelo Método das Forças

Equações de compatibilidade

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

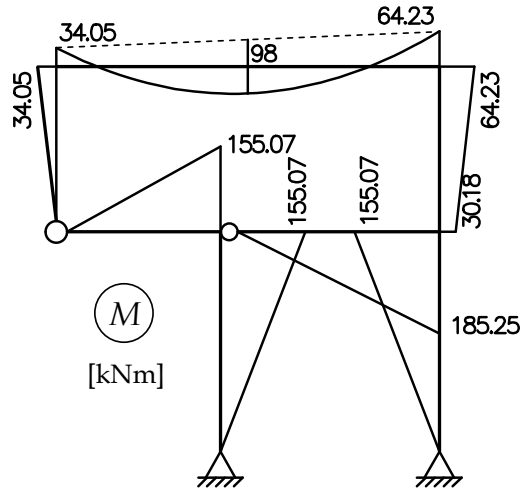
Solução do sistema de equações (tabela na página seguinte):

Matrícula	δ_{10} [x10 ⁻³]	δ_{20} [x10 ⁻³]	δ_{11} [x10 ⁻⁵]	$\delta_{12} = \delta_{21}$ [x10 ⁻⁵]	δ_{22} [x10 ⁻⁵]	X_1 [kNm]	X_2 [kNm]
1511292	0.6000	-1.8000	5.6944	-2.5000	7.0833	0.73	25.67
1511561	0.5333	-4.8000	5.6944	-1.8056	6.8056	14.19	74.30
1512423	-1.1111	-10.0000	5.6944	-1.1111	6.5278	51.10	161.89
1512618	-7.2000	-21.6000	7.9167	-2.0833	9.5833	159.38	260.04
1520208	-0.1861	-1.7194	5.1927	-1.7205	6.3039	13.88	31.06
1520955	-1.5042	-4.5708	5.2538	-1.0871	6.0871	45.86	83.28
1521044	-5.2833	-9.5056	7.5161	-2.0994	9.1827	105.98	127.74
1521066	13.7250	-25.8750	7.5926	-3.1481	8.9815	-71.74	262.95
1611768	-1.1556	-1.6889	4.8611	-1.1111	5.6944	31.98	35.90
1612011	-3.9000	-4.4333	7.1556	-2.1556	8.8222	75.17	68.62
1612648	5.6000	-11.2889	6.9618	-2.9340	8.3507	-27.54	125.51
1612752	7.6667	-24.3333	6.7778	-2.0556	7.8889	-21.25	302.91
1621373	-2.3250	-1.7250	6.8519	-2.2685	8.5185	44.57	32.12
1712112	2.2375	-5.0958	6.3265	-2.7154	7.7154	-8.27	63.14
1712989	2.5056	-10.6056	6.2277	-1.9222	7.3388	4.76	145.76
1810339	0.7083	-22.8917	6.1662	-1.1662	6.9995	52.01	335.71
1810501	-2.3250	-1.7250	5.7407	-1.4352	6.8519	49.38	35.52
1810989	-1.5042	-4.5708	6.3649	-1.9204	7.7538	44.76	70.04
1811351	2.5056	-10.6056	7.3388	-2.7555	9.0055	11.38	121.25
1812121	13.7250	-25.8750	6.4815	-2.3148	7.3148	-96.31	323.26
1920621	-1.1556	-1.6889	5.9722	-1.9444	7.3611	29.34	30.69

Solução pelo Método das Forças

$$\text{Momentos Fletores Finais: } M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$

Solução para $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $c = 4 \text{ m}$, $d = 3 \text{ m}$ e $q = 16 \text{ kN/m}$
 $X_1 = +34.05 \text{ kNm}$ e $X_2 = +64.23 \text{ kNm}$



ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2020

Grau G1 – 4ª Questão – Entrega: 28/09/2020 até 9:00 hs (não serão aceitas respostas depois desse dia e horário)

A solução da 4ª Questão do grau G1 deve ser entregue em um arquivo em formato PDF com os seguinte nome: **ENG1204-202-G1-Q4-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno.

Leia com atenção as instruções abaixo e os enunciados dos itens da questão.

As respostas devem ser feitas como um relatório da memória de cálculo. A qualidade da apresentação vai ser considerada na avaliação da resposta.

As soluções podem ser feitas à mão em papel e digitalizadas, criadas digitalmente através de algum editor de texto, ou por uma combinação de trechos e desenhos feitos à mão e digitalizados com trechos editados digitalmente.

Cada aluna ou aluno tem um conjunto de valores para as dimensões do pórtico e solicitações aplicadas. Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

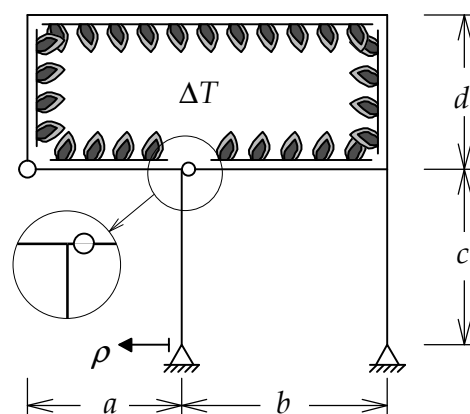
4ª Questão (3,0 pontos)

O modelo estrutural desta questão é o mesmo da 3ª Questão do Grau G1. O que muda é que nesta questão existem duas solicitações: aumento de temperatura ΔT no interior do ciclo fechado de barras do pórtico plano e recalque horizontal ρ do apoio da esquerda, conforme indica a figura ao lado.

Calcule os hiperestáticos da solução pelo Método das Forças para cada uma das solicitações atuando separadamente. Utilize o mesmo Sistema Principal adotado para a sua solução da 3ª Questão do Grau G1.

Todas as barras têm a mesma rigidez à flexão $EI = 1.2 \times 10^5$ kNm². O coeficiente de dilatação térmica de todas as barras é $\alpha = 1.0 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.

Todas as barras têm a mesma seção transversal com altura $h = 0.60$ m e centro de gravidade fica situado no meio da altura.



Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	ΔT [°C]	ρ [m]
1511292	3	3	6	5	8	0.010
1511561	4	4	5	4	12	0.010
1512423	5	5	4	3	16	0.010
1512618	6	6	3	6	24	0.010
1520208	3	4	5	4	8	0.012
1520955	4	5	4	3	12	0.012
1521044	5	6	3	6	16	0.012
1521066	6	3	6	5	24	0.012
1611768	3	5	4	3	8	0.014
1612011	4	6	3	6	12	0.014
1612648	5	3	6	5	16	0.014
1612752	6	4	5	4	24	0.014
1621373	3	6	3	6	8	0.016
1712112	4	3	6	5	12	0.016
1712989	5	4	5	4	16	0.016
1810339	6	5	4	3	24	0.016
1810501	3	6	3	4	8	0.018
1810989	4	5	4	5	12	0.018
1811351	5	4	5	6	16	0.018
1812121	6	3	6	3	24	0.018
1920621	3	5	4	5	8	0.020

Sugere-se que o programa Ftool seja utilizado tanto para auxiliar nos cálculos quanto para geração de figuras das soluções.

Opções de configuração no Ftool:

Unidades gerais adotadas: [kN-m] (configure utilizando a opção *Units & Number Formatting...* do menu *Options*).

Unidade para distâncias: [m]; número de casas decimais para distâncias: 0 (nenhuma casa decimal).

Unidade para forças: [kN]; número de casas decimais para forças: 2.

Unidade para momentos: [kNm]; número de casas decimais para momentos: 2.

Unidade para variação de temperatura: [°C]; número de casas decimais para variação de temperatura: 0.

Valor e unidade do módulo de elasticidade (E) do material (*Generic Isotropic*) para todas as barras: 10^8 kN/m² (1.0e+08 kN/m²). O coeficiente de dilatação térmica do material é $\alpha = 1.0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$.

Parâmetros de seção transversal (*Generic/Integral Properties*) para todas as barras:

Valor e unidade da área da seção transversal (A): 0.012 m².

Valor e unidade do momento de inércia da seção transversal (I): 0.0012 m⁴.

Valor e unidade da altura da seção transversal (h): 0.60 m. Valor e unidade para posição do centro de gravidade da seção transversal em relação à base (\bar{y}): 0.30 m.

Todas as barras dos modelos estruturais são consideradas sem deformação axial e sem deformação por cisalhamento (efeito cortante). Para configurar isso no Ftool, no menu *Deformation Constraints* selecione *Flexible Member* e deixe as opções *Axial Deformation* and *Shear Deformation* NÃO selecionadas. Aplique isso para todas as barras.

Item (4.a) – Caso (0) – Solicitação externa de variação de temperatura isolada no Sistema Principal (1,0 ponto)

Mostre em uma figura a configuração deformada do caso (0) com escala de deslocamentos exagerada, indicando as componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *termos de carga*, com nomes δ_{i0}^T , sendo i o número do hiperestático correspondente. Os termos de carga devem ser indicados na figura pelos seus nomes. Com base nos resultados da 3ª Questão, calcule os termos de carga e indique seus valores com unidades. **Considere deformações axiais para o cálculo dos termos de carga para variação de temperatura.**

Item (4.b) – Sistema de equações de compatibilidade e cálculo dos hiperestáticos para a solicitação de variação de temperatura (0,5 ponto)

Com base nos coeficientes de flexibilidade calculados na 3ª Questão e nos termos de carga calculados no item (4.a) desta questão, monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças para a solicitação de variação de temperatura. Calcule os valores dos hiperestáticos para essa solicitação com sinal e unidades.

Item (4.c) – Caso (0) – Solicitação externa de recalque de apoio isolada no Sistema Principal (1,0 ponto)

Mostre em uma figura a configuração deformada do caso (0) com escala de deslocamentos exagerada, indicando as componentes de deslocamentos e rotações nas direções dos vínculos rompidos para a criação do SP. Essas componentes de deslocamentos e rotações correspondem aos *termos de carga*, com nomes δ_{i0}^p , sendo i o número do hiperestático correspondente. Os termos de carga devem ser indicados na figura pelos seus nomes. Com base nos resultados da 3ª Questão, calcule os termos de carga e indique seus valores com unidades.

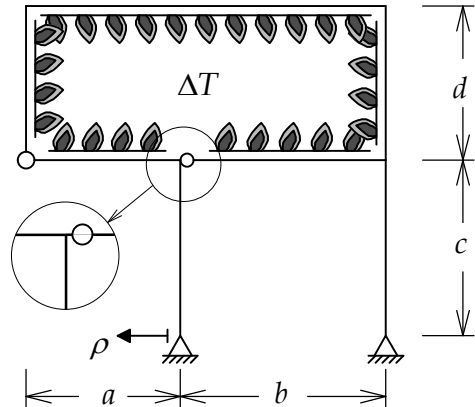
Item (4.d) – Sistema de equações de compatibilidade e cálculo dos hiperestáticos para a solicitação de recalque de apoio (0,5 ponto)

Com base nos coeficientes de flexibilidade calculados na 3ª Questão e nos termos de carga calculados no item (4.c) desta questão, monte o sistema de equações de compatibilidade que resulta da solução do quadro original pelo Método das Forças para a solicitação de recalque de apoio. Calcule os valores dos hiperestáticos para essa solicitação com sinal e unidades.

ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2020
Grau G1 - 4ª Questão

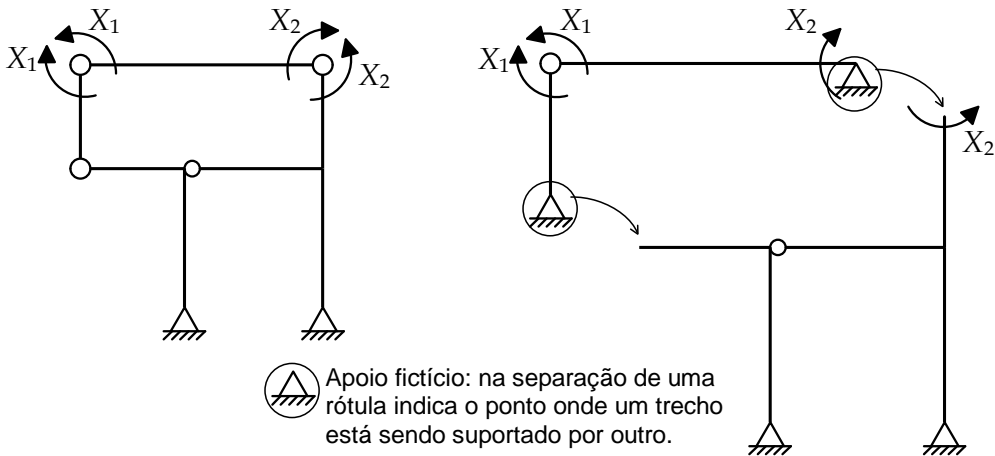
Calcule os hiperestáticos da solução pelo Método das Forças para cada uma das solicitações atuando separadamente. **Utilize o mesmo Sistema Principal adotado para a sua solução da 3ª Questão do Grau G1.**

Todas as barras têm a mesma rigidez à flexão $EI = 1.2 \times 10^5 \text{ kNm}^2$. O coeficiente de dilatação térmica de todas as barras é $\alpha = 1.0 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.



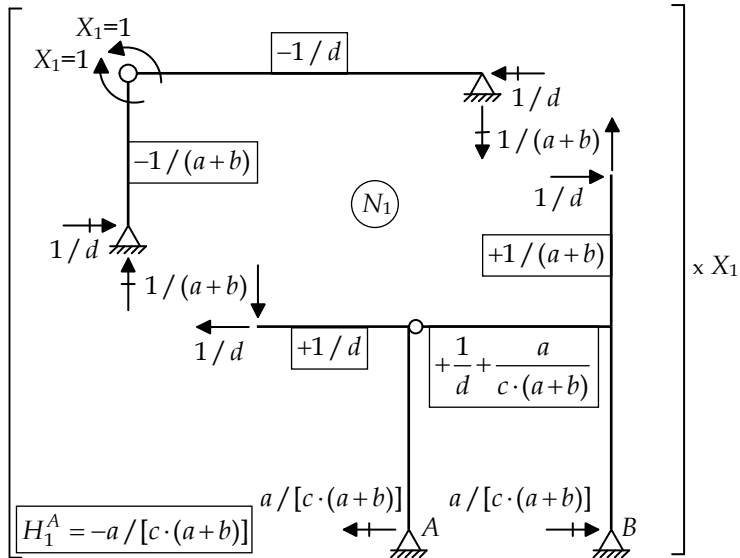
Sistema Principal adotado

Decomposição ACÍCLICA na sequência de carregamento



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP – Grau G1 – Questão 3

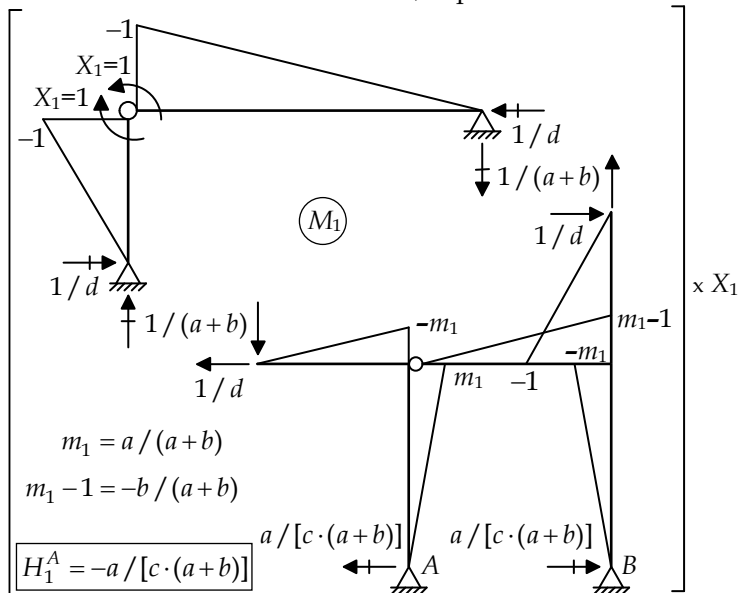
Diagrama de esforços normais



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP – Grau G1 – Questão 3

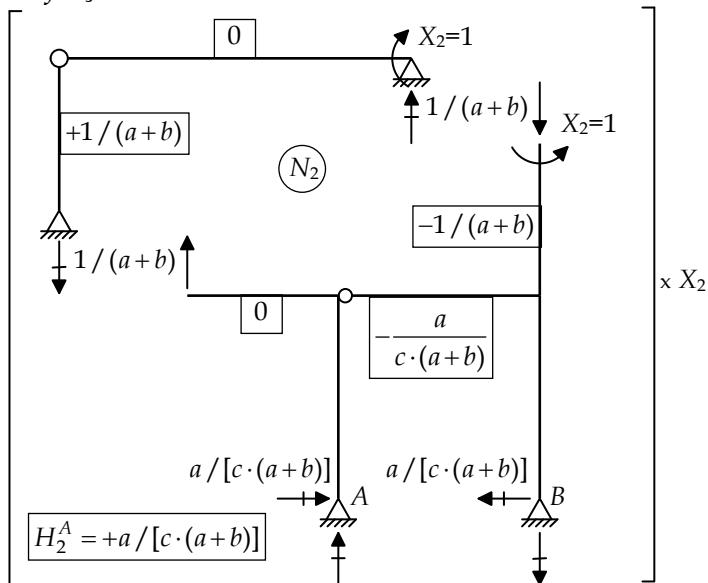
Diagrama de momentos fletores

(fibra inferior de barra vertical: fibra da direita; positivo \rightarrow traciona fibra inferior)



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP – Grau G1 – Questão 3

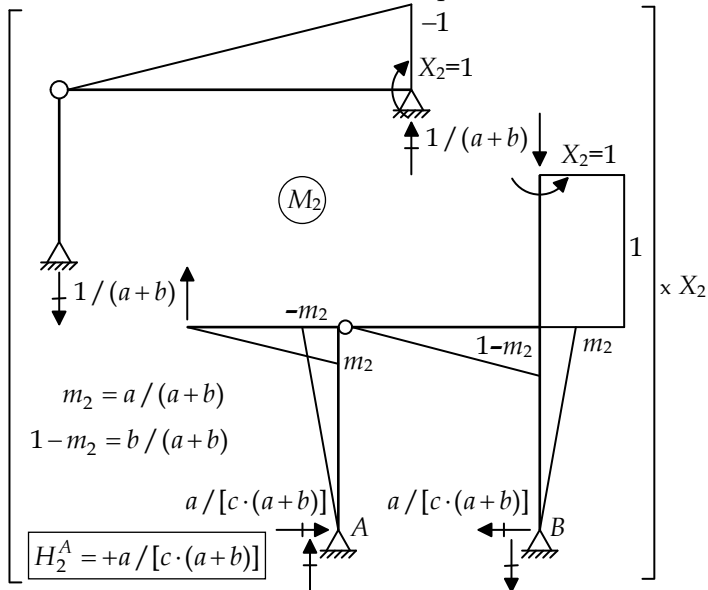
Diagrama de esforços normais



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP – Grau G1 – Questão 3

Diagrama de momentos fletores

(fibra inferior de barra vertical: fibra da direita; positivo \rightarrow traciona fibra inferior)



Termos de carga para variação de temperatura pelo PFV

$$\delta_{i0}^T = \int_{anel} N_i \cdot du_0^T + \int_{anel} M_i \cdot d\theta_0^T$$

$$du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{CG} dx$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

$$\delta_{i0}^T = \sum_{barras} \left[\alpha \cdot \Delta T_{CG} \cdot \int N_i \cdot dx \right]_{barra} + \sum_{barras} \left[\frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} \cdot \int M_i \cdot dx \right]_{barra}$$

$$\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

Altura da seção transversal: $h = 0.60 \text{ m}$

Centro de gravidade da seção transversal se situa no meio da altura (todas as barras do anel) $\Rightarrow \Delta T_{CG} = (\Delta T_i + \Delta T_s) / 2 \Rightarrow \Delta T_{CG} = +\Delta T / 2$

Barra horizontal superior: $\Delta T_i = +\Delta T$ $\Delta T_s = 0^\circ\text{C}$

Barra vertical na esquerda: $\Delta T_i = +\Delta T$ $\Delta T_s = 0^\circ\text{C}$

Barra horizontal inferior: $\Delta T_i = 0^\circ\text{C}$ $\Delta T_s = +\Delta T$

Barra vertical na direita: $\Delta T_i = 0^\circ\text{C}$ $\Delta T_s = +\Delta T$

Termos de carga para variação de temperatura pelo PFV

$$\delta_{10}^T = \alpha \cdot \frac{\Delta T}{2} \cdot \left[\frac{-1}{d} \cdot (a+b) + \frac{-1}{a+b} \cdot d + \frac{+1}{a+b} \cdot d + \frac{+1}{d} \cdot a + \frac{+1}{d} \cdot b + \frac{a}{c \cdot (a+b)} \cdot b \right]$$
$$+ \alpha \cdot \frac{\Delta T}{0.60} \cdot \left[\frac{-1 \cdot (a+b)}{2} + \frac{-1 \cdot d}{2} - \frac{-1 \cdot d}{2} - \frac{-a \cdot a}{2 \cdot (a+b)} - \frac{-b \cdot b}{2 \cdot (a+b)} \right]$$

$$\delta_{20}^T = \alpha \cdot \frac{\Delta T}{2} \cdot \left[\frac{+1}{a+b} \cdot d + \frac{-1}{a+b} \cdot d + \frac{-a}{c \cdot (a+b)} \cdot b \right]$$
$$+ \alpha \cdot \frac{\Delta T}{0.60} \cdot \left[\frac{-1 \cdot (a+b)}{2} - (+1 \cdot d) - \frac{+a \cdot a}{2 \cdot (a+b)} - \frac{+b \cdot b}{2 \cdot (a+b)} \right]$$

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	ΔT [°C]	δ_{10}^T [x10 ⁻⁵ rad]	δ_{20}^T [x10 ⁻⁵ rad]
1511292	3	3	6	5	8	-19.0000	-127.6667
1511561	4	4	5	4	12	-37.6000	-202.4000
1512423	5	5	4	3	16	-61.6667	-285.0000
1512618	6	6	3	6	24	-108.0000	-612.0000
1520208	3	4	5	4	8	-21.4857	-125.1810
1520955	4	5	4	3	12	-41.1111	-198.8889
1521044	5	6	3	6	16	-65.4545	-387.8788
1521066	6	3	6	5	24	-76.0000	-484.0000
1611768	3	5	4	3	8	-23.1250	-123.5417
1612011	4	6	3	6	12	-43.2000	-276.8000
1612648	5	3	6	5	16	-47.5000	-299.1667
1612752	6	4	5	4	24	-90.2400	-469.7600
1621373	3	6	3	6	8	-24.0000	-176.0000
1712112	4	3	6	5	12	-32.5714	-207.4286
1712989	5	4	5	4	16	-55.7037	-290.9630
1810339	6	5	4	3	24	-100.9091	-459.0909
1810501	3	6	3	4	8	-24.0000	-149.3333
1810989	4	5	4	5	12	-41.1111	-238.8889
1811351	5	4	5	6	16	-55.7037	-344.2963
1812121	6	3	6	3	24	-76.0000	-404.0000
1920621	3	5	4	5	8	-23.1250	-150.2083

Item (4.b) – Sistema de equações de compatibilidade e cálculo dos hiperestáticos para a solicitação de variação de temperatura

Equações de compatibilidade

$$\begin{cases} \delta_{10}^T + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20}^T + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

Coeficientes de flexibilidade da Questão 3 do Grau G1

$$\delta_{ij} = \int_{\text{estrutura}} \frac{M_i M_j}{EI} dx = \sum_{\text{barras}} \left[\frac{1}{EI} \int_{\text{barra}} M_i M_j dx \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (a+b) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot d \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot a \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot b + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot c \right) \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{3EI} \cdot \left[a+b+2d + \frac{a^3+b^3+2a^2c}{(a+b)^2} \right]$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (a+b) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot d - \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot a \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot b - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot c \right) \right]$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{3EI} \cdot \left[\frac{a+b}{2} - \frac{3d}{2} - \frac{a^3+b^3+2a^2c}{(a+b)^2} \right]$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (a+b) + 1 \cdot 1 \cdot d + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot a \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot b + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot c \right) \right]$$

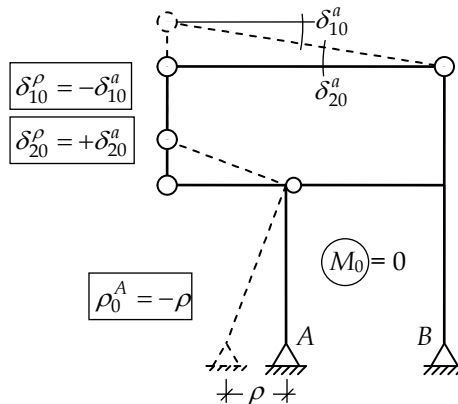
$$\delta_{22} = \frac{1}{3EI} \cdot \left[a+b+3d + \frac{a^3+b^3+2a^2c}{(a+b)^2} \right]$$

Coeficientes de flexibilidade [rad/kNm] e solução do sistema de equações (tabela na página seguinte):

Matrícula	δ_{10}^T [x10 ⁻⁵ rad]	δ_{20}^T [x10 ⁻⁵ rad]	δ_{11} [x10 ⁻⁵]	$\delta_{12} = \delta_{21}$ [x10 ⁻⁵]	δ_{22} [x10 ⁻⁵]	X_1 [kNm]	X_2 [kNm]
1511292	-19.0000	-127.6667	5.6944	-2.5000	7.0833	13.31	22.72
1511561	-37.6000	-202.4000	5.6944	-1.8056	6.8056	17.51	34.38
1512423	-61.6667	-285.0000	5.6944	-1.1111	6.5278	20.01	47.07
1512618	-108.0000	-612.0000	7.9167	-2.0833	9.5833	32.30	70.88
1520208	-21.4857	-125.1810	5.1927	-1.7205	6.3039	11.78	23.07
1520955	-41.1111	-198.8889	5.2538	-1.0871	6.0871	15.15	35.38
1521044	-65.4545	-387.8788	7.5161	-2.0994	9.1827	21.91	47.25
1521066	-76.0000	-484.0000	7.5926	-3.1481	8.9815	37.86	67.16
1611768	-23.1250	-123.5417	4.8611	-1.1111	5.6944	10.17	23.68
1612011	-43.2000	-276.8000	7.1556	-2.1556	8.8222	16.72	35.46
1612648	-47.5000	-299.1667	6.9618	-2.9340	8.3507	25.73	44.87
1612752	-90.2400	-469.7600	6.7778	-2.0556	7.8889	34.07	68.42
1621373	-24.0000	-176.0000	6.8519	-2.2685	8.5185	11.34	23.68
1712112	-32.5714	-207.4286	6.3265	-2.7154	7.7154	19.66	33.80
1712989	-55.7037	-290.9630	6.2277	-1.9222	7.3388	23.04	45.68
1810339	-100.9091	-459.0909	6.1662	-1.1662	6.9995	29.71	70.54
1810501	-24.0000	-149.3333	5.7407	-1.4352	6.8519	10.16	23.92
1810989	-41.1111	-238.8889	6.3649	-1.9204	7.7538	17.03	35.03
1811351	-55.7037	-344.2963	7.3388	-2.7555	9.0055	24.79	45.82
1812121	-76.0000	-404.0000	6.4815	-2.3148	7.3148	35.46	66.45
1920621	-23.1250	-150.2083	5.9722	-1.9444	7.3611	11.51	23.44

Item (4.c) – Caso (0) – Solicitação externa de recalque de apoio isolada no Sistema Principal

Configuração deformada



Termos de carga δ_{i0}^ρ : rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada ao hiperestático X_i provocada pelo recalque de apoio.

Termos de carga para recalque de apoio no caso (0)

Recalques provocam deslocamentos de corpo rígido (sem deformações ou esforços internos) nas barras do Sistema Principal isostático.

Portanto, os deslocamentos relativos internos são nulos:

$$\boxed{du_0^\rho = 0} \quad \boxed{dh_0^\rho = 0} \quad \boxed{d\theta_0^\rho = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{U} = 0}$$

Por outro lado, o trabalho das forças externas do sistema virtual - caso (i) - deve considerar também o trabalho da reação horizontal H_i^A no apoio que sofre o recalque horizontal $\rho_0^A = -\rho$:

$$\bar{W}_E = 1 \cdot \delta_{i0}^\rho + H_i^A \cdot \rho_0^A$$

$$\text{PFV: } \bar{W}_E = \bar{U} \Rightarrow \boxed{\delta_{i0}^\rho = H_i^A \cdot \rho}$$

$$\boxed{\delta_{10}^\rho = H_1^A \cdot \rho = \rho \cdot \left[\frac{-a}{c \cdot (a+b)} \right]}$$

$$\boxed{\delta_{20}^\rho = H_2^A \cdot \rho = \rho \cdot \left[\frac{+a}{c \cdot (a+b)} \right]}$$

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	ρ [m]	δ_{10}^{ρ} [$\times 10^{-5}$ rad]	δ_{20}^{ρ} [$\times 10^{-5}$ rad]
1511292	3	3	6	5	0.010	-83.3333	83.3333
1511561	4	4	5	4	0.010	-100.0000	100.0000
1512423	5	5	4	3	0.010	-125.0000	125.0000
1512618	6	6	3	6	0.010	-166.6667	166.6667
1520208	3	4	5	4	0.012	-102.8571	102.8571
1520955	4	5	4	3	0.012	-133.3333	133.3333
1521044	5	6	3	6	0.012	-181.8182	181.8182
1521066	6	3	6	5	0.012	-133.3333	133.3333
1611768	3	5	4	3	0.014	-131.2500	131.2500
1612011	4	6	3	6	0.014	-186.6667	186.6667
1612648	5	3	6	5	0.014	-145.8333	145.8333
1612752	6	4	5	4	0.014	-168.0000	168.0000
1621373	3	6	3	6	0.016	-177.7778	177.7778
1712112	4	3	6	5	0.016	-152.3810	152.3810
1712989	5	4	5	4	0.016	-177.7778	177.7778
1810339	6	5	4	3	0.016	-218.1818	218.1818
1810501	3	6	3	4	0.018	-200.0000	200.0000
1810989	4	5	4	5	0.018	-200.0000	200.0000
1811351	5	4	5	6	0.018	-200.0000	200.0000
1812121	6	3	6	3	0.018	-200.0000	200.0000
1920621	3	5	4	5	0.020	-187.5000	187.5000

Item (4.d) – Sistema de equações de compatibilidade e cálculo dos hiperestáticos para a solicitação de recalque de apoio

Equações de compatibilidade

$$\begin{cases} \delta_{10}^p + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20}^p + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

Coeficientes de flexibilidade [rad/kNm] e solução do sistema de equações (tabela na página seguinte):

Matrícula	δ_{10}^{ρ} [x10 ⁻⁵ rad]	δ_{20}^{ρ} [x10 ⁻⁵ rad]	δ_{11} [x10 ⁻⁵]	$\delta_{12} = \delta_{21}$ [x10 ⁻⁵]	δ_{22} [x10 ⁻⁵]	X_1 [kNm]	X_2 [kNm]
1511292	-83.3333	83.3333	5.6944	-2.5000	7.0833	11.21	-7.81
1511561	-100.0000	100.0000	5.6944	-1.8056	6.8056	14.09	-10.96
1512423	-125.0000	125.0000	5.6944	-1.1111	6.5278	18.84	-15.94
1512618	-166.6667	166.6667	7.9167	-2.0833	9.5833	17.48	-13.59
1520208	-102.8571	102.8571	5.1927	-1.7205	6.3039	15.83	-12.00
1520955	-133.3333	133.3333	5.2538	-1.0871	6.0871	21.65	-18.04
1521044	-181.8182	181.8182	7.5161	-2.0994	9.1827	19.93	-15.24
1521066	-133.3333	133.3333	7.5926	-3.1481	8.9815	13.35	-10.17
1611768	-131.2500	131.2500	4.8611	-1.1111	5.6944	22.75	-18.61
1612011	-186.6667	186.6667	7.1556	-2.1556	8.8222	21.28	-15.96
1612648	-145.8333	145.8333	6.9618	-2.9340	8.3507	15.95	-11.86
1612752	-168.0000	168.0000	6.7778	-2.0556	7.8889	19.90	-16.11
1621373	-177.7778	177.7778	6.8519	-2.2685	8.5185	20.88	-15.31
1712112	-152.3810	152.3810	6.3265	-2.7154	7.7154	18.39	-13.28
1712989	-177.7778	177.7778	6.2277	-1.9222	7.3388	22.92	-18.22
1810339	-218.1818	218.1818	6.1662	-1.1662	6.9995	30.45	-26.10
1810501	-200.0000	200.0000	5.7407	-1.4352	6.8519	29.06	-23.10
1810989	-200.0000	200.0000	6.3649	-1.9204	7.7538	25.55	-19.47
1811351	-200.0000	200.0000	7.3388	-2.7555	9.0055	21.37	-15.67
1812121	-200.0000	200.0000	6.4815	-2.3148	7.3148	23.78	-19.82
1920621	-187.5000	187.5000	5.9722	-1.9444	7.3611	25.28	-18.80