

ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2020

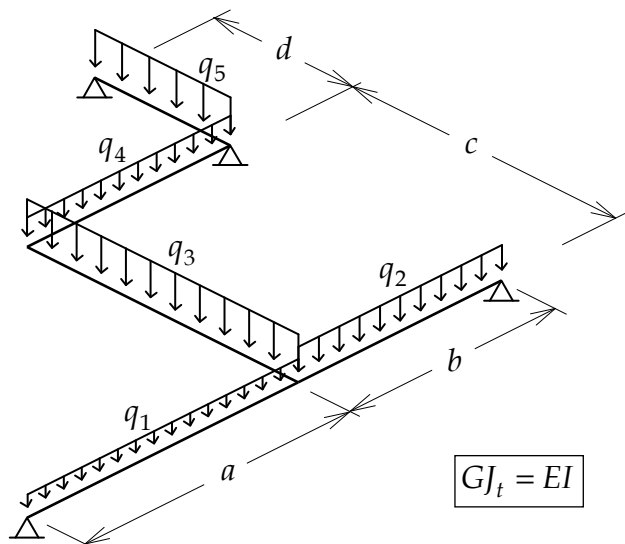
Grau G2 - 1ª Questão - Aplicação: 15/04/2020, 9 hs - Entrega: 18/04/2020, 17 hs

1ª Questão (2,5 pontos)

Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e de momentos de torção para a grelha abaixo. Todos os passos da solução têm de ser indicados. Isto é, mostre:

1. Cálculo do(s) termo(s) de carga e do(s) coeficiente(s) de flexibilidade.
2. Sistema de equação(ões) de compatibilidade.
3. Valor(es) do(s) hiperestático(s) obtido(s) da solução deste sistema.
4. Superposição para obtenção dos diagramas finais.

Todas as barras têm a relação indicada entre a rigidez à flexão EI e a rigidez à torção GJ_t , em que E é módulo de elasticidade do material, G é o módulo de cisalhamento do material, I é o momento de inércia à flexão da seção transversal e J_t é o momento de inércia à torção da seção transversal.



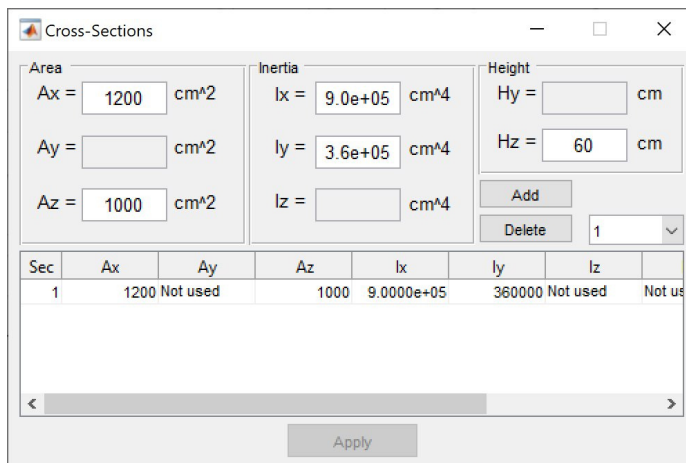
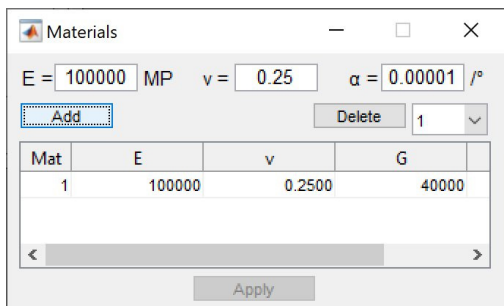
Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]	q_3 [kN/m]	q_4 [kN/m]	q_5 [kN/m]
	3	3	6	5	8	8	24	16	24
	4	4	5	4	12	12	16	12	16
	5	5	4	3	16	16	12	8	12
	6	6	3	6	24	24	8	24	8
	3	4	5	4	8	12	16	12	24
	4	5	4	3	12	16	12	8	16
	5	6	3	6	16	24	8	24	12
	6	3	6	5	24	8	24	16	8
	3	5	4	3	8	16	12	8	24
	4	6	3	6	12	24	8	24	16
	5	3	6	5	16	8	24	16	12
	6	4	5	4	24	12	16	12	8
	3	6	3	6	8	24	8	24	24
	4	3	6	5	12	8	24	16	16
	5	4	5	4	16	12	16	12	12
	6	5	4	3	24	16	12	8	8
	3	6	3	4	8	24	8	12	24
	4	5	4	5	12	16	12	16	16
	5	4	5	6	16	12	16	24	12
	6	3	6	3	24	8	24	8	8
	3	5	4	5	8	16	12	16	24

A solução da 1ª Questão do grau G2 deve ser entregue na página da disciplina no Moodle/CCEAD em um arquivo em formato PDF com o seguinte nome: **ENG1204-201-G2-Q1-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno. Não serão aceitas respostas após 17 hs do dia 18/04/2020.

Sugere-se o uso do programa LESM (para análise de pórticos e treliças planas, grelhas, e pórticos e treliças espaciais): <http://www.tecgraf.puc-rio.br/lesm>.

Os seguintes parâmetros de material e de seção transversal devem ser utilizados no LESM para obter a relação $GJ_t = EI$:



O valor do módulo de cisalhamento G do material é calculado automaticamente pelo LESM através da expressão:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

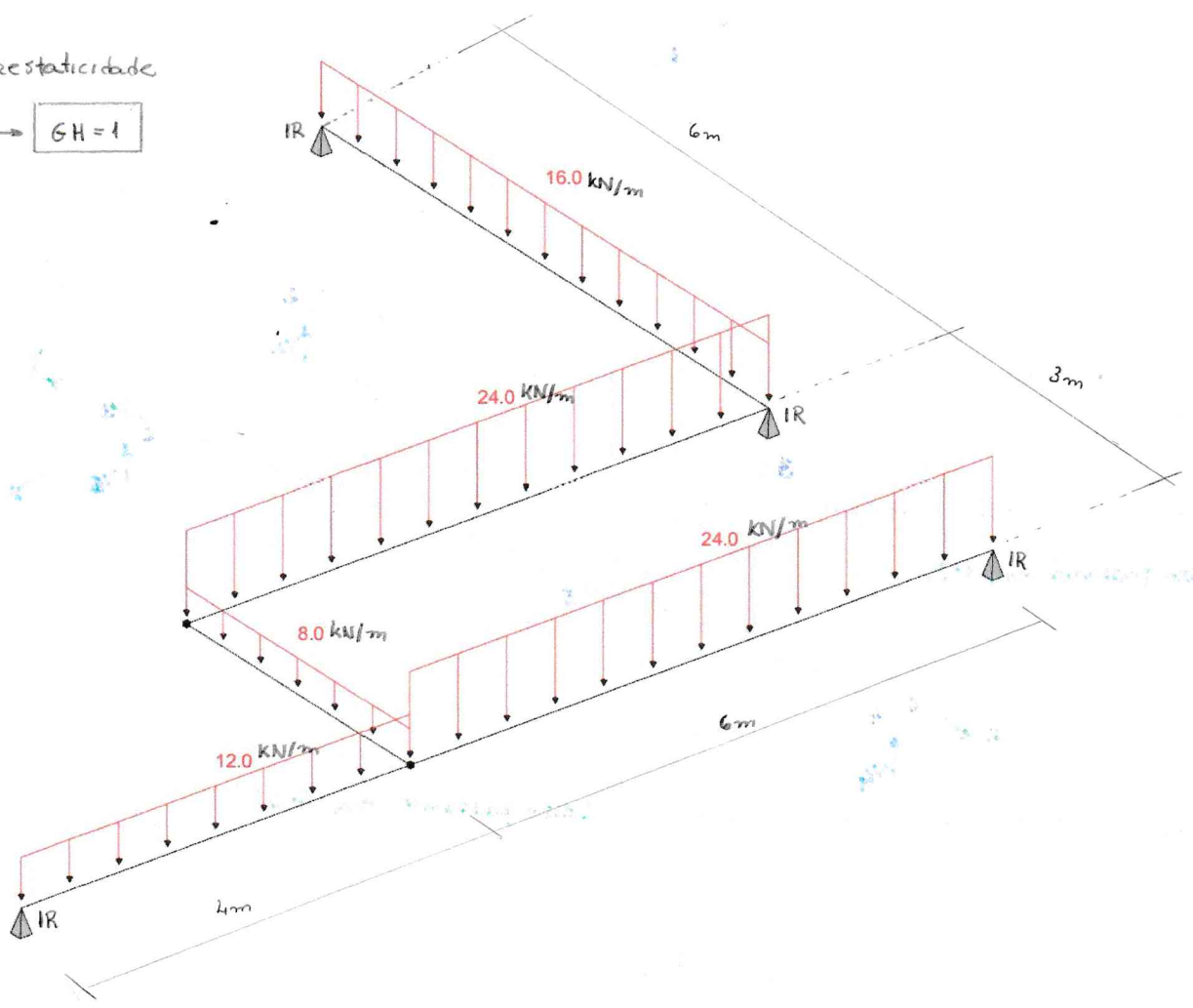
em que ν é o coeficiente de Poisson do material.

Questão 01.

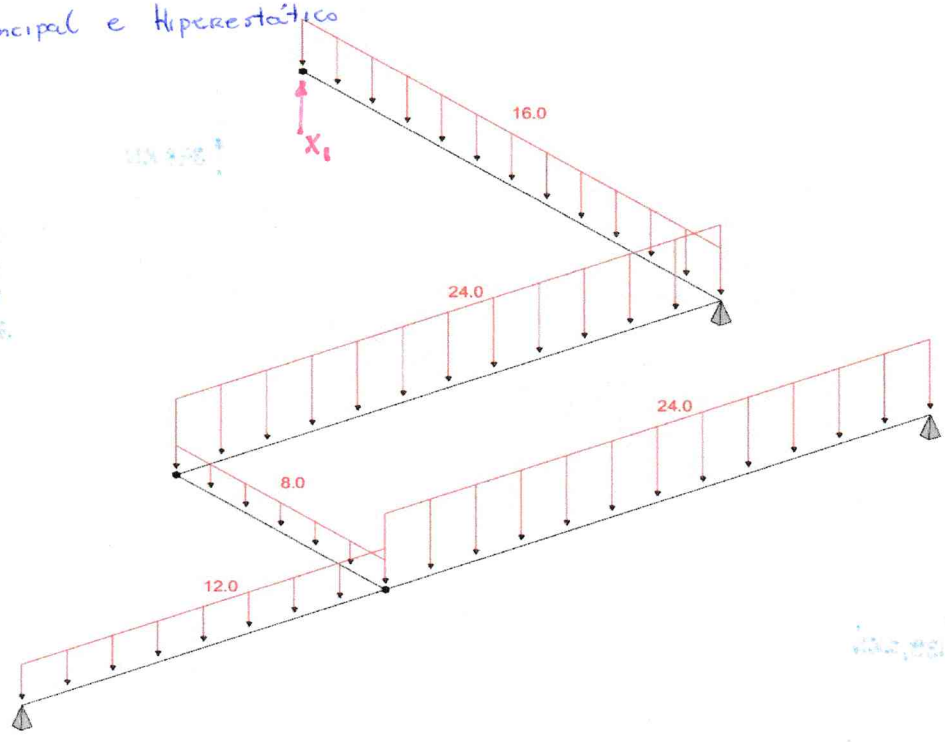
Grau de Hiperestaticidade

$G_H = 4 - 3 \rightarrow G_H = 1$

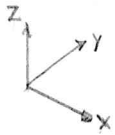
$GJ_T = EI$



Sistema Principal e Hiperestático



Caso (0) - Solicitações externas isoladas no SP



Resolvendo a grelha

Equilíbrio:

$$+\uparrow \sum F_z = 0 \rightarrow -96 - 124 - 24 - 144 - 48 + V_c + V_2 + V_4 = 0$$

$$V_2 + V_4 + V_c = 456$$

$$V_c = -31,2 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_y = 0 \rightarrow -V_2 \cdot 3 + 96 \cdot 6 + 144 \cdot 3 + 24 \cdot 1,5 = 0$$

(eixo passando em 1-3)

$$V_2 = 348 \text{ kN}$$

$$+\leftarrow \sum M_x = 0 \rightarrow 144 \cdot 3 + 24 \cdot 6 + 144 \cdot 3 + 28 \cdot 8 - 10 V_4 = 0 \text{ (eixo passando em 4-6)}$$

$$V_4 = 139,2 \text{ kN}$$

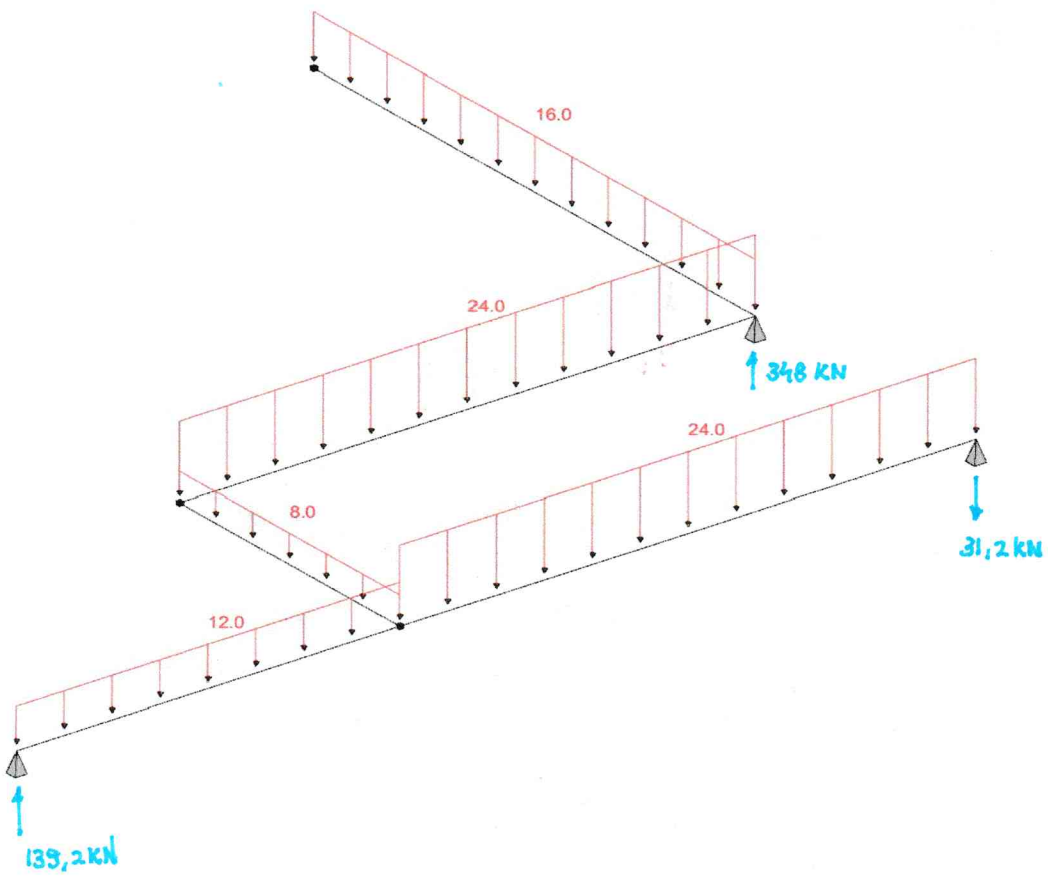
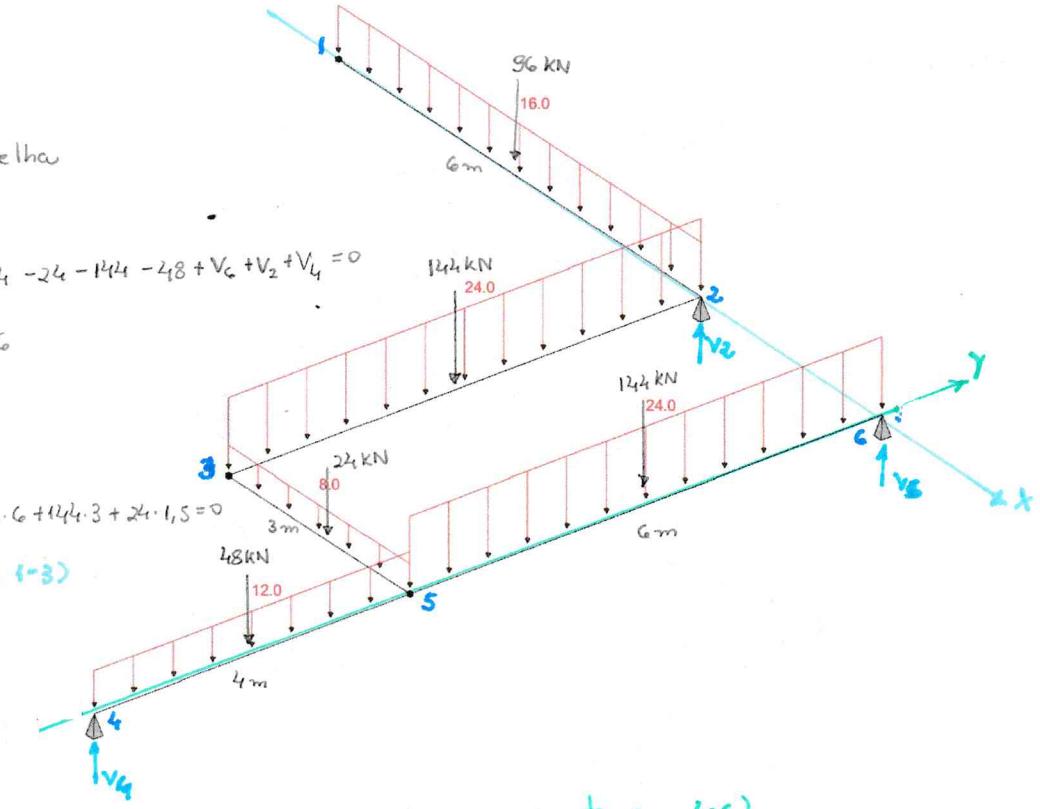


Diagrama de momento fletor

M_0

[kNm]

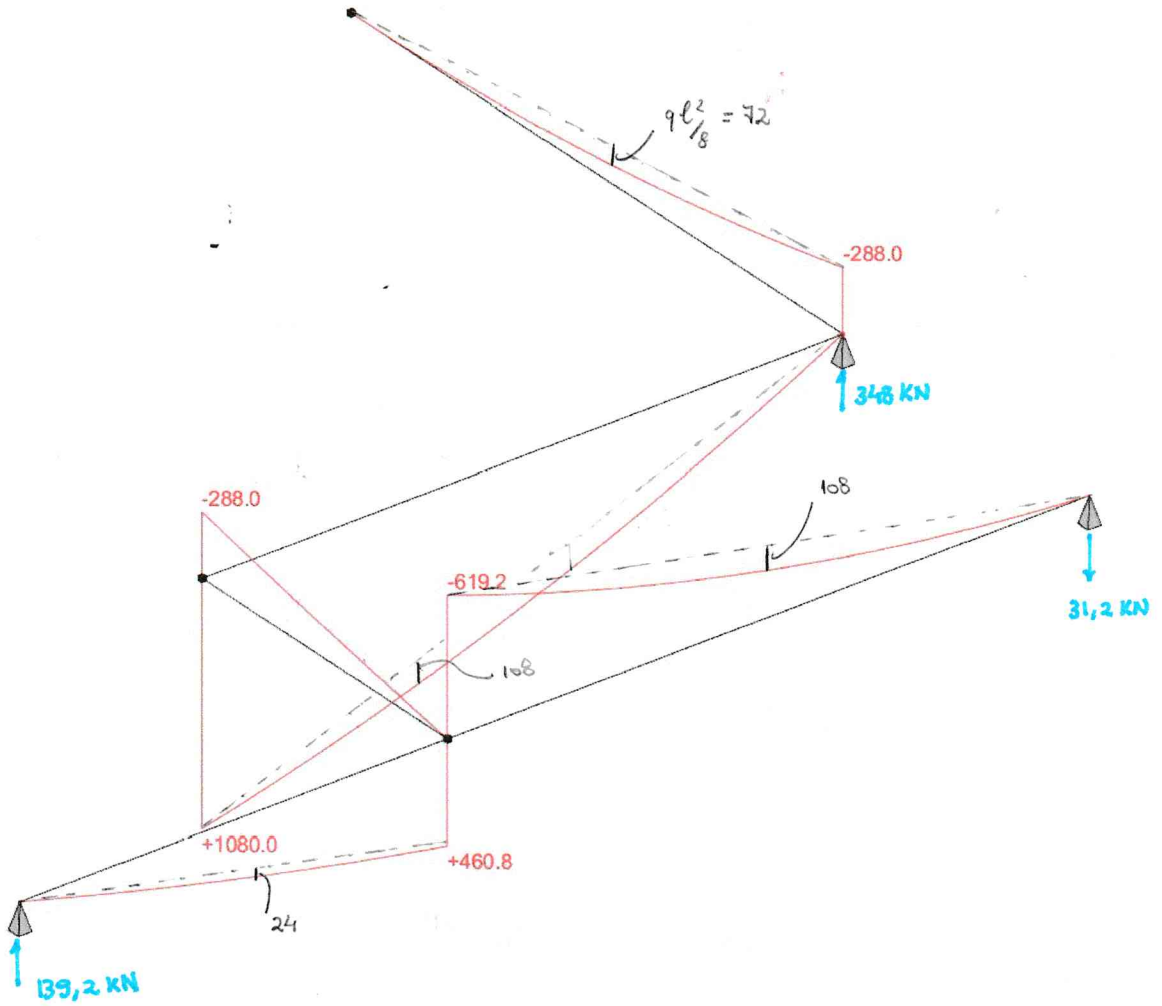
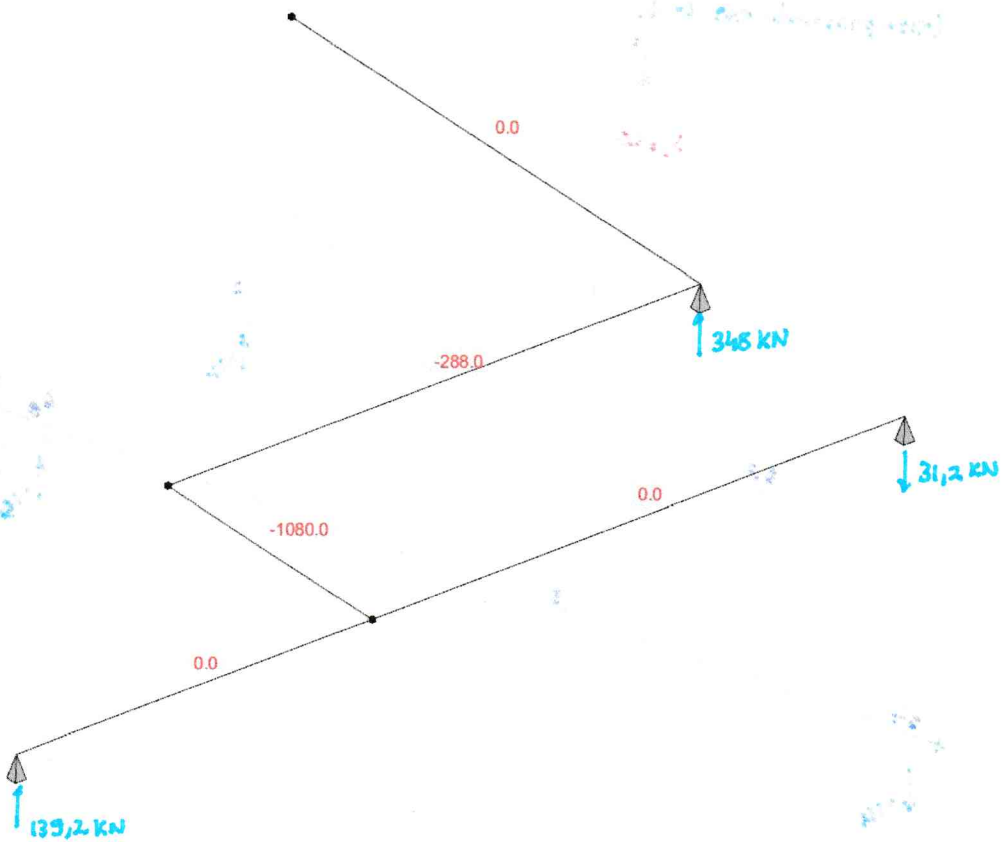


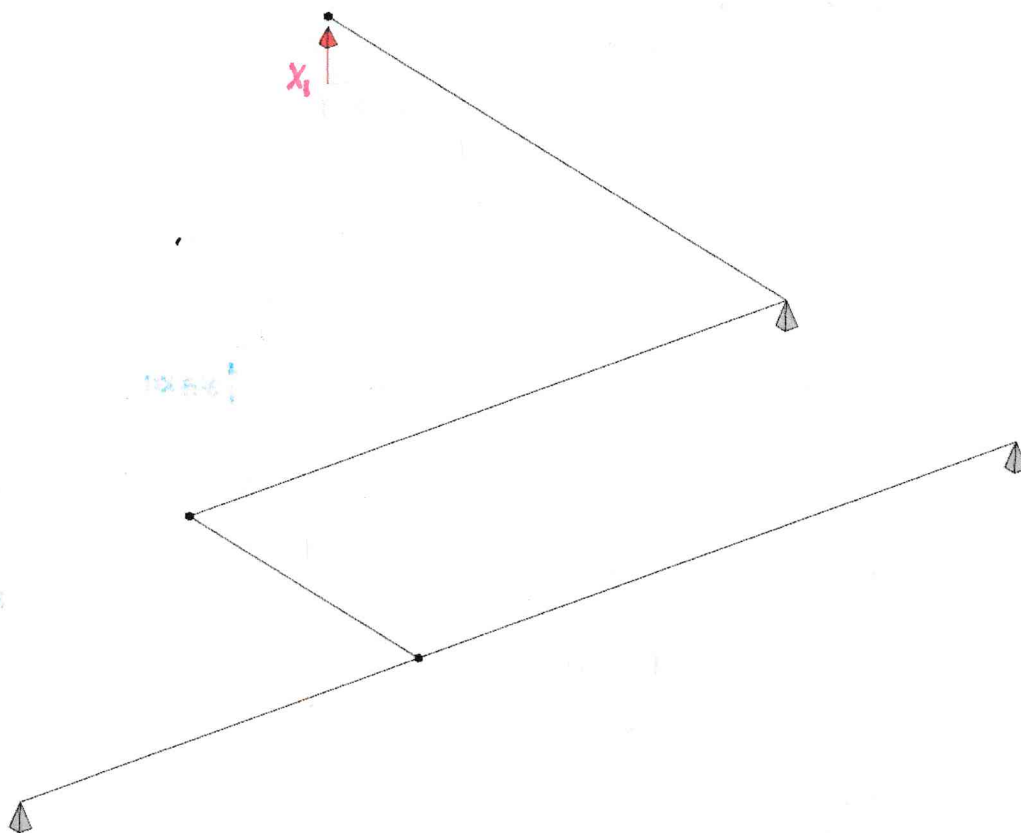
Diagrama de momento torsor

T_0

[kNm]



Caso (1) - Hiperestático X_1 isolado no SP

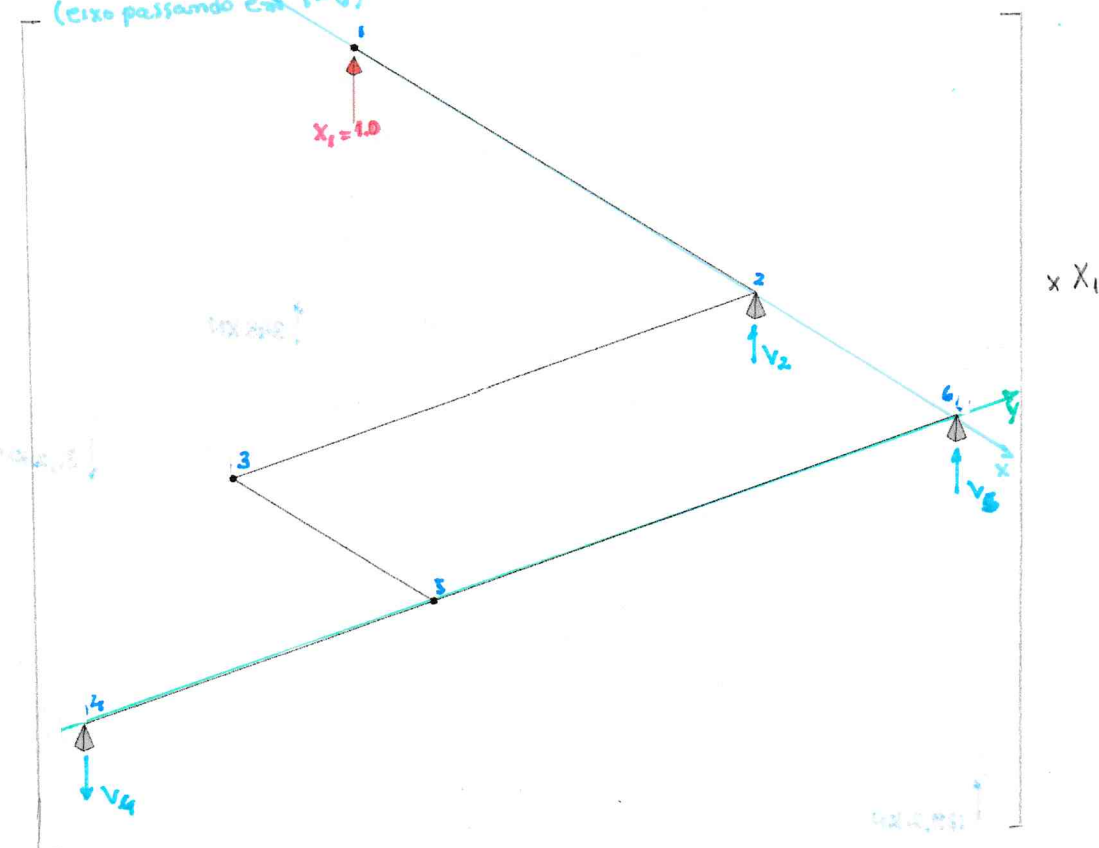


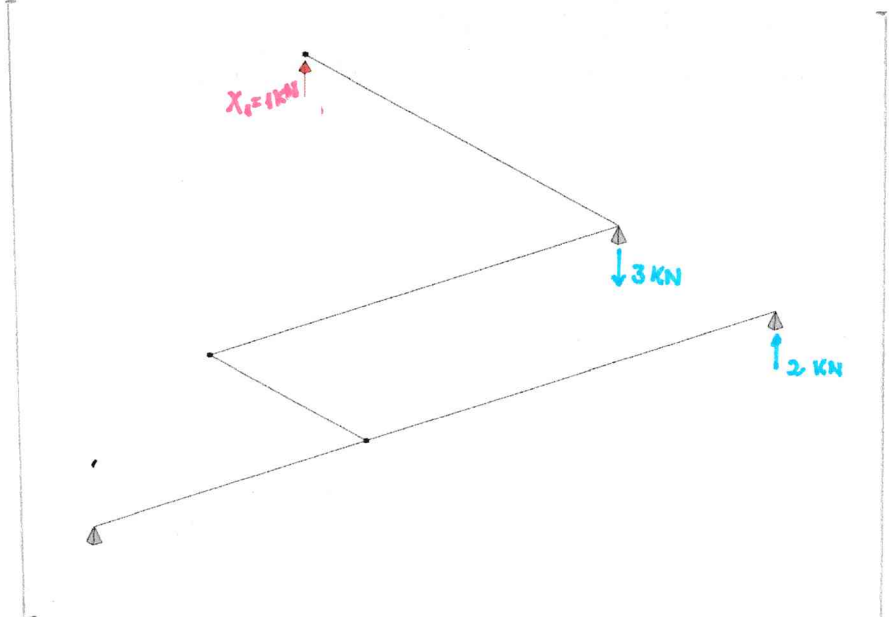
Resolvendo a grelha

equilíbrio: $+ \uparrow \sum F_z = 0 \rightarrow 1 + V_2 + V_6 - V_4 = 0 \rightarrow \boxed{V_6 = 2 \text{ kN}}$

$+ \curvearrowright \sum M_y = 0 \rightarrow -1 \cdot 9 - 3V_2 = 0 \rightarrow \boxed{V_2 = -3 \text{ kN}}$
 (eixo passando em 4-6)

$+ \leftarrow \sum M_x = 0 \rightarrow 10 \cdot V_4 = 0 \rightarrow \boxed{V_4 = 0}$
 (eixo passando em 1-6)



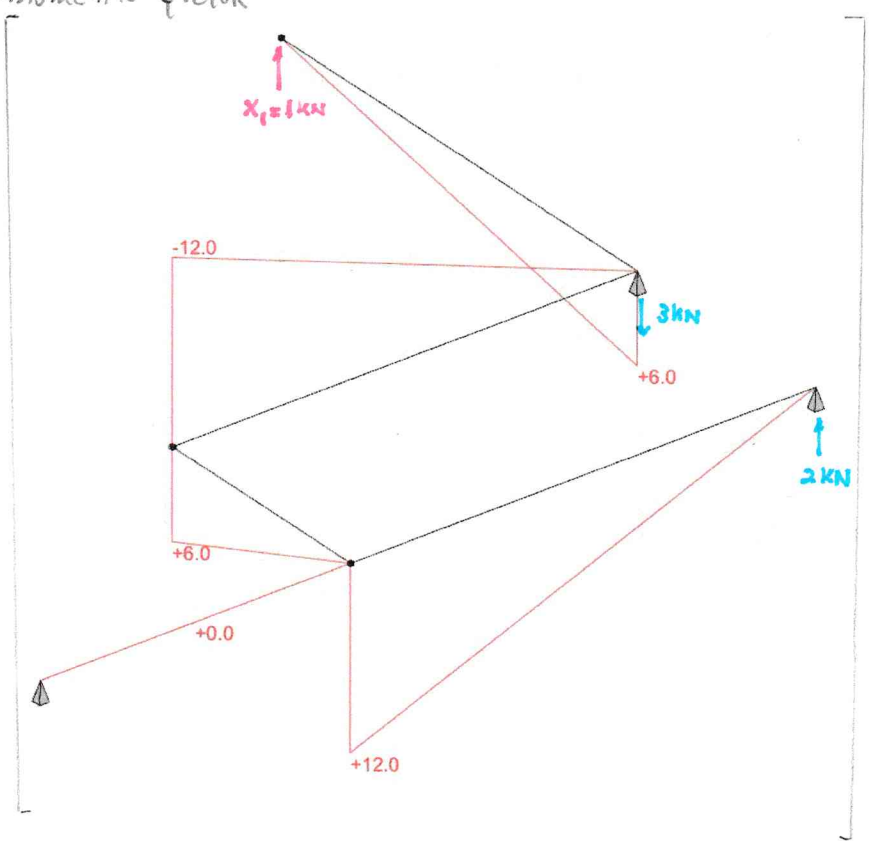


$\times X_1$

Diagrama de momento fletor

M_1

[kNm]

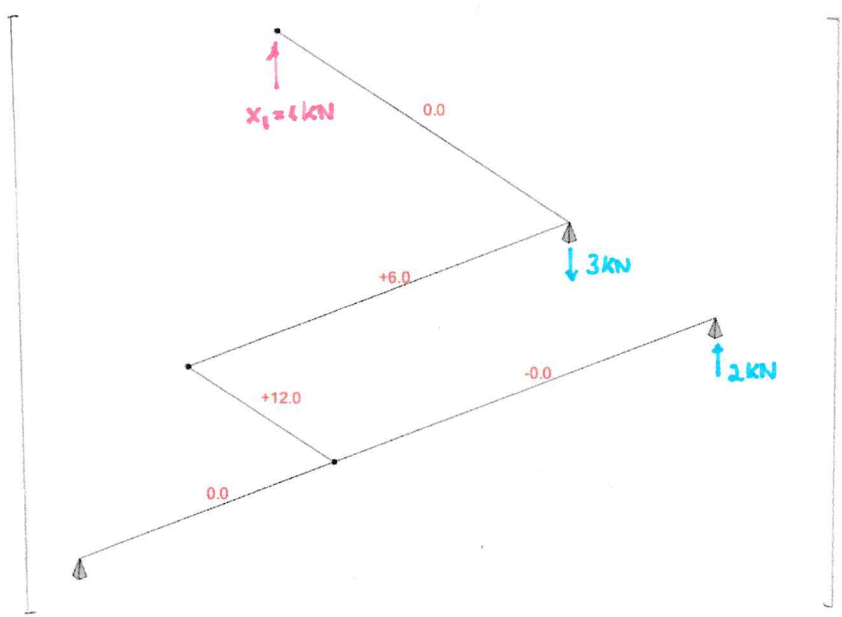


$\times X_1$

Diagrama de momento torçor

T_1

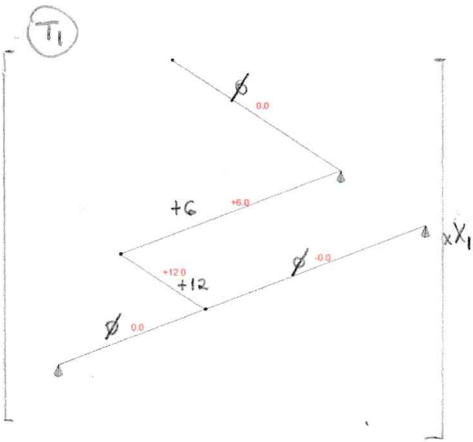
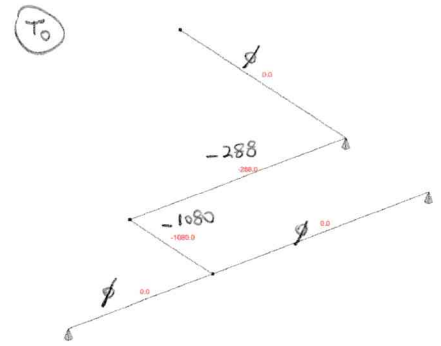
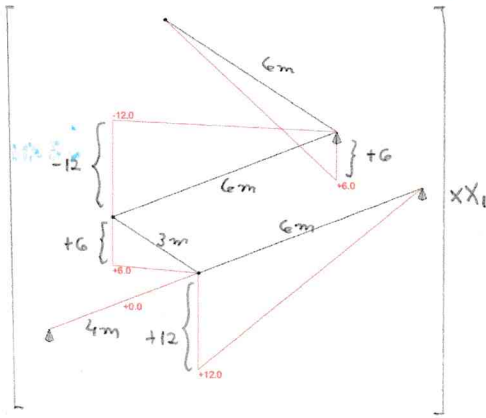
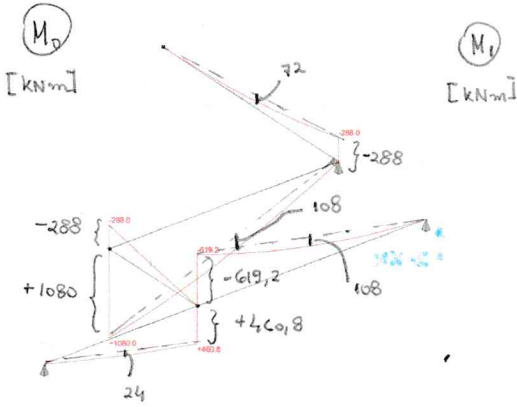
[kNm]



$\times X_1$

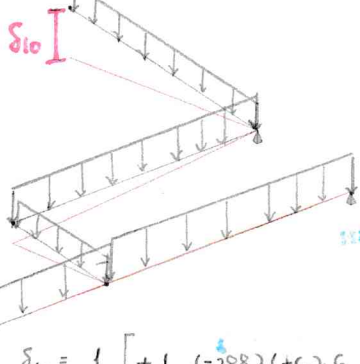
Equações de compatibilidade: $\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$

Cálculo do termo de carga e do coeficiente de flexibilidade



Termo de carga δ_{10}

Configuração deformada



$$\delta_{10} = \int_{\text{Estrutura}} M_1 d\theta_0 + \int_{\text{Estrutura}} T_1 d\phi_0$$

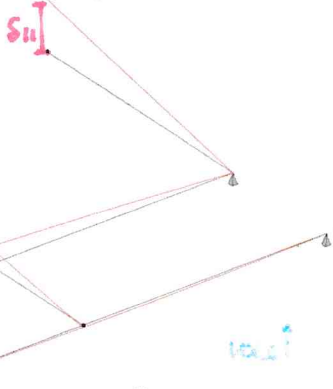
$$\delta_{10} = \int_{\text{Estrutura}} \frac{M_1 M_0}{EI} + \int_{\text{Estrutura}} \frac{T_1 T_0}{GJ_T}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[+\frac{1}{3} (-288)(+6) \cdot 6 - \frac{1}{3} (-72)(+6) \cdot 6 + \frac{1}{3} (+1080)(-12) \cdot 6 + \frac{1}{3} (+108)(-12) \cdot 6 + \frac{1}{3} (-288)(+6) \cdot 3 \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (-619,2)(+12) \cdot 6 - \frac{1}{3} (-108)(+12) \cdot 6 \right] + \frac{1}{GJ_T} \left[(-288) \cdot (+6) \cdot 6 + (-1080) \cdot (+12) \cdot 3 \right]$$

$$\delta_{10} = -262,08 \text{ mm} = -0,26208 \text{ m}$$

Coefficiente de flexibilidade δ_{11}

Configuração deformada



$$\delta_{11} = \int_{\text{Estrutura}} \frac{M_1 M_1}{EI} dx + \int_{\text{Estrutura}} \frac{T_1 T_1}{GJ_T} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[+\frac{1}{3} (+6)(+6) \cdot 6 + \frac{1}{3} (-12)(-12) \cdot 6 + \frac{1}{3} (+6)(+6) \cdot 3 + \frac{1}{3} (+12)(+12) \cdot 6 \right]$$

$$+ \frac{1}{GJ_T} \left[(+6)(+6) \cdot 6 + (+12)(+12) \cdot 3 \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} [72 + 288 + 36 + 288] + \frac{1}{GJ_T} [648] \text{ : como } GJ_T = EI \rightarrow \delta_{11} = \frac{1}{EI} [1432]$$

$$\delta_{11} = +3,7 \text{ mm/kN} = +3,7 \times 10^{-3} \text{ m/kN}$$

Resolvendo as equações de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \rightarrow -0,26208 + (3,7 \times 10^{-3}) X_1 = 0$$

$$X_1 = +70,8 \text{ kN}$$

Diagrama de momentos fletoras finais para estrutura hiperestática

$$M = M_0 + M_1 X_1$$

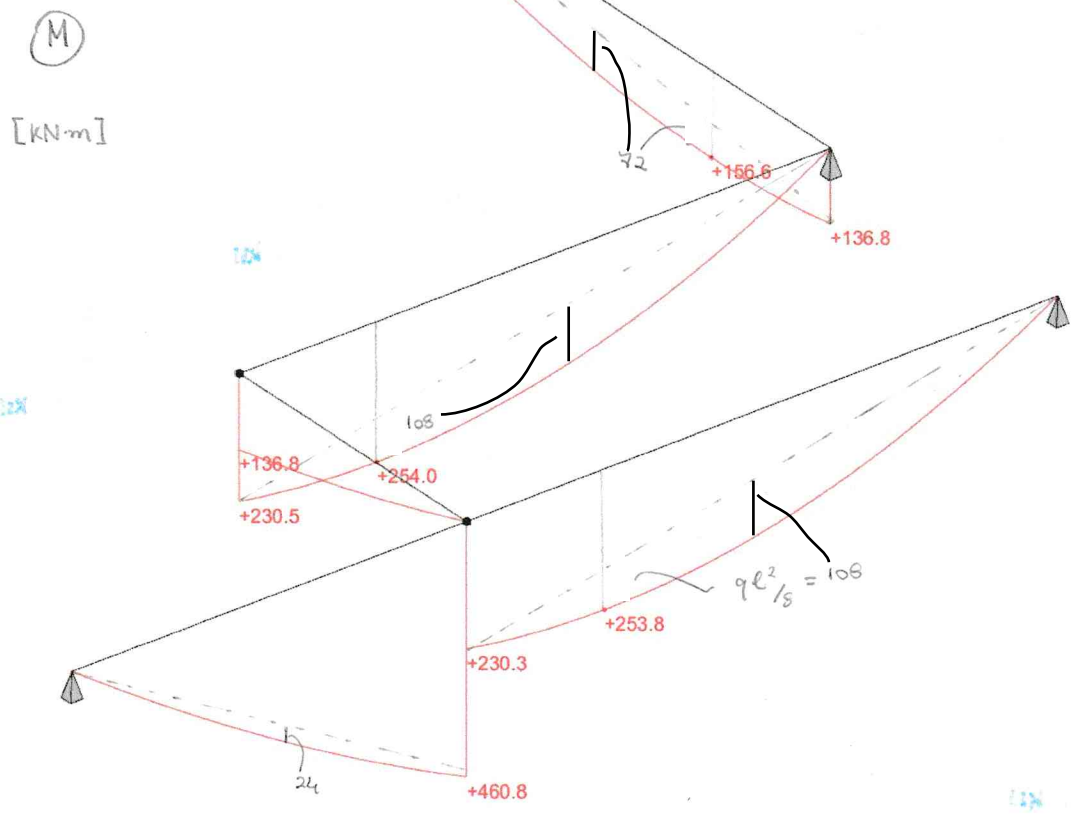
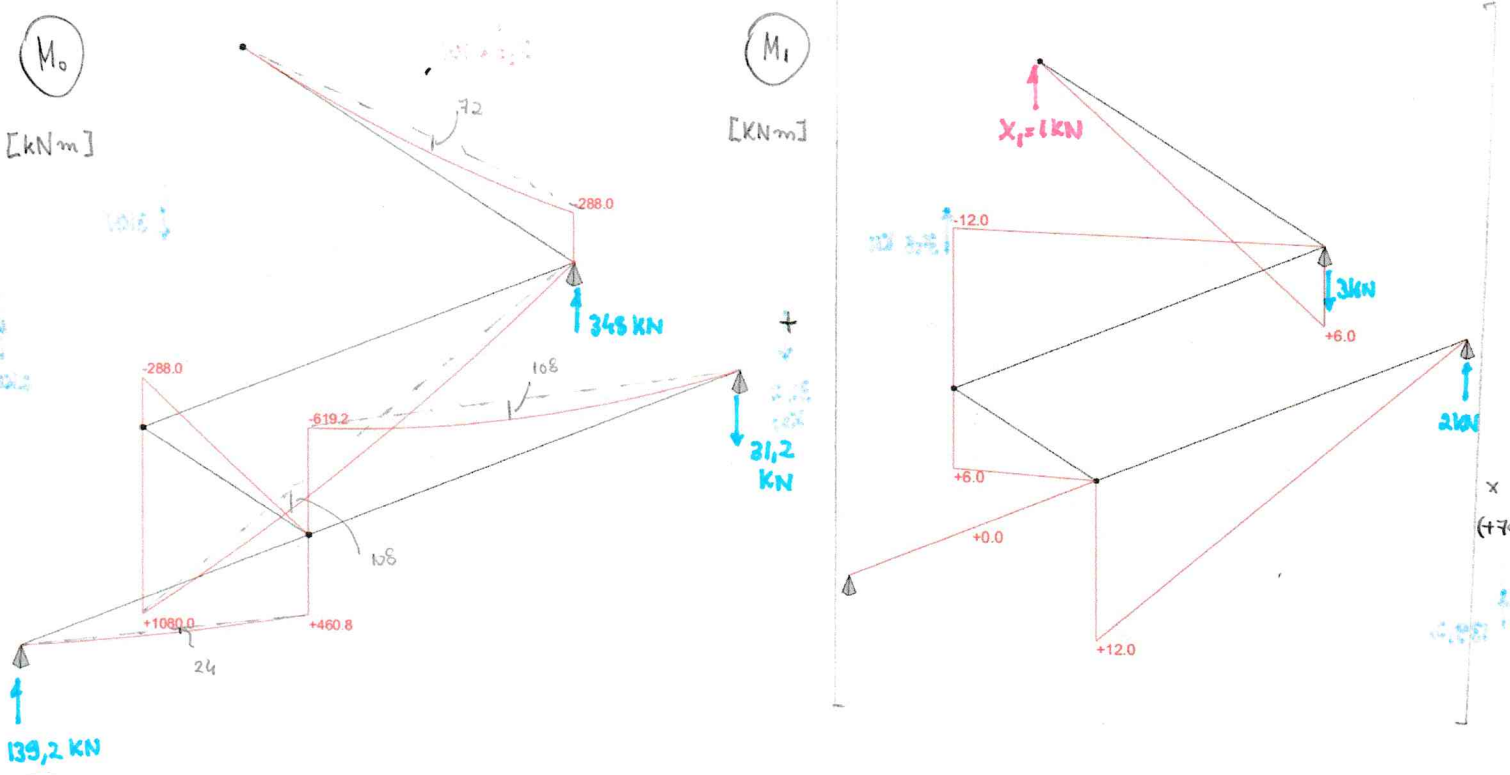
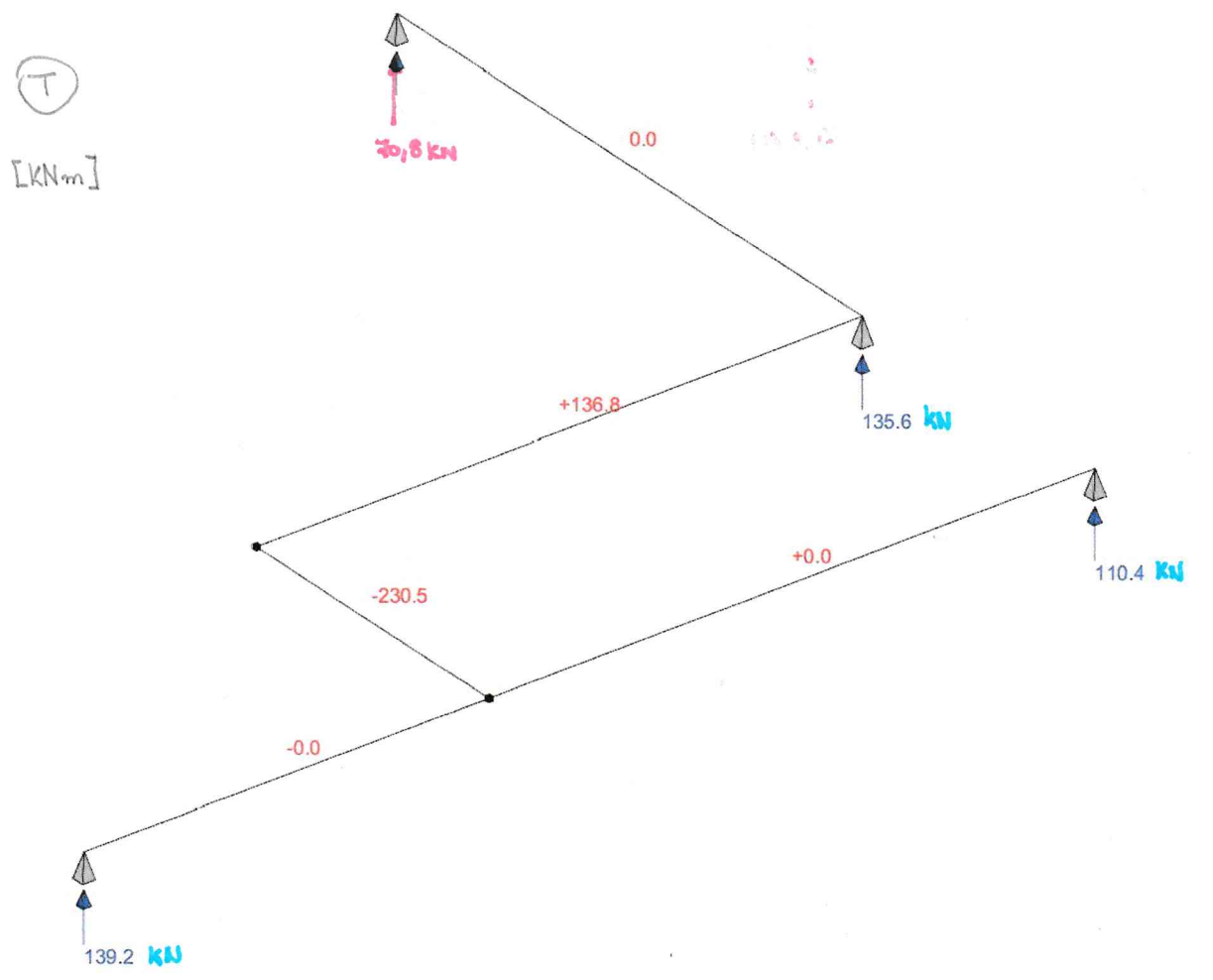
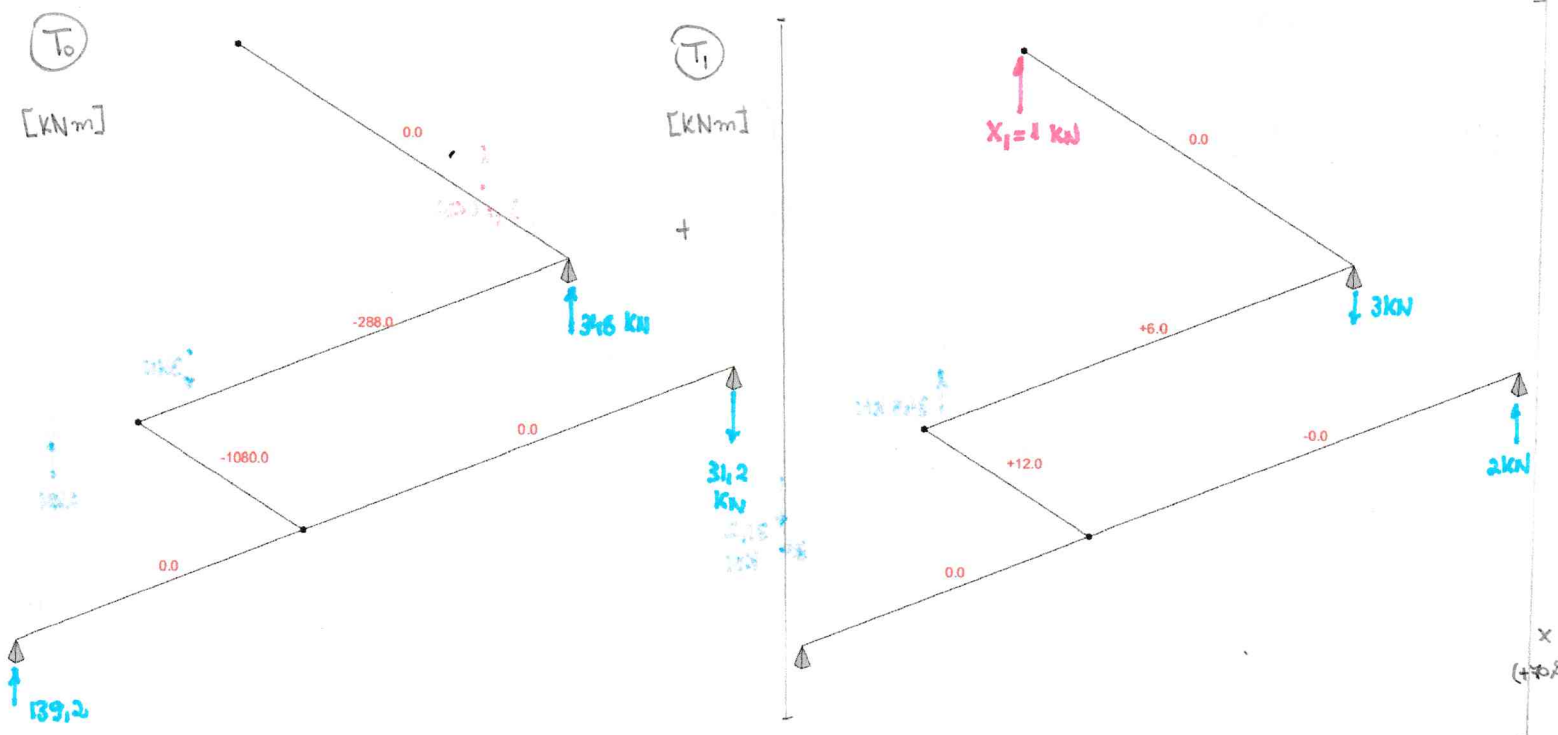


Diagrama de momentos torsores finais para estrutura hiperestática

$$T = T_0 + T_1 X_1$$



ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2020

T2: Simulação computacional do Método dos Deslocamentos 2ª questão do grau G2 (1,5 pontos) - Data da entrega: 27/04/2020

Estude o exemplo de solução de um pórtico pelo Método dos Deslocamentos ("http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/eng1204roteiroMD.pdf"). Estude o tutorial sobre o Método dos Deslocamentos disponível em "http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/metdes1_0_0.exe" (versão *off-line*). Obtenha o programa Ftool e seu manual em "<http://www.ftool.com.br>". Assista no site da disciplina no Ambiente de Aprendizagem Online da PUC-Rio (<https://ead.puc-rio.br/login/index.php>) o vídeo "Aula 18: Método dos Deslocamentos: Introdução". Siga os passos descritos nos itens abaixo e escreva um relatório. Este relatório deve conter as figuras que forem necessárias para descrever a simulação e seus valores numéricos.

Item (a) - Estrutura original a ser resolvida

Defina arbitrariamente, usando o programa Ftool, um quadro plano **com pelo menos quatro deslocabilidades**. Defina também as propriedades elásticas e geométricas das barras e as cargas que atuam no quadro. Adote todas as unidades em kN e m. Crie uma figura com a estrutura, suas dimensões e todas as propriedades e cargas utilizadas. Essa figura deve mostrar a configuração deformada da estrutura, com as componentes de deslocamentos e rotações (com valores e unidades) dos nós do modelo estrutural indicadas. Essas componentes de deslocamentos e rotações dos nós são as incógnitas do Método dos Deslocamentos, são chamadas de *deslocabilidades*, e devem ser identificadas pelo nome D_j , sendo j o número da deslocabilidade. Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe as deslocabilidades com seus nomes, valores e unidades à mão. Anote os valores das deslocabilidades (com sinal) para usar no item (f).

Item (b) - Sistema Hipergeométrico

Obtenha uma estrutura completamente indeslocável (todos os nós com deslocamentos e rotações impedidos) a partir da inserção de vínculos externos (apoios fictícios) na estrutura do item (a). Essa estrutura será o Sistema Hipergeométrico (SH) para a resolução da estrutura original pelo Método dos Deslocamentos. Mostre o SH em uma figura com os apoios fictícios numerados de acordo com a numeração das deslocabilidades.

Item (c) - Caso básico (0)

Para o Sistema Hipergeométrico do item (b), mantenha o carregamento do item (a). Isto corresponde ao caso (0) do Método dos Deslocamentos. Mostre a configuração deformada da estrutura juntamente com o carregamento aplicado, indicando as reações de apoio (com valores e unidades) que correspondem aos termos de carga β_{i0} . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores (com sinal) e unidades dos termos de carga à mão.

Item (d) - Casos básicos que isolam as deslocabilidades

Retire as cargas utilizadas no item (c) e imponha ao Sistema Hipergeométrico, alternadamente, deslocamentos ou rotações prescritos com valores unitários nos nós onde os vínculos foram inseridos no item (b). Utilize a opção *Prescribed Displacements* do menu *Support Conditions* para impor um deslocamento prescrito. Isso deve gerar um caso de solicitação para cada deslocabilidade imposta independentemente, sendo que cada um corresponde a um dos casos (j) do Método dos Deslocamentos, onde j é o número de uma deslocabilidade. Mostre a configuração deformada da estrutura para cada uma das deslocabilidades unitárias impostas, indicando as reações de apoio (com valores, sinais e unidades) que correspondem aos *coeficientes de rigidez globais* K_{ij} . Sugestão: imprima a imagem da tela do programa e desenhe os nomes, valores, sinais e unidades dos coeficientes de rigidez à mão.

Item (e) - Sistema de equações de equilíbrio

Com base nos resultados dos itens (c) e (d), monte o sistema de equações de equilíbrio que resulta da solução do quadro original pelo Método dos Deslocamentos. Os valores numéricos dos coeficientes deste sistema de equações são obtidos dos termos de carga e dos coeficientes de rigidez.

Item (f) - Verificação da solução do sistema de equações de equilíbrio

Com base nos resultados da estrutura original do item (a), verifique se os valores das deslocabilidades correspondem realmente à solução do sistema de equações obtido no item (e).

Item (g) - Obtenção de esforços internos

Indique os passos seguintes à solução do sistema de equações de equilíbrio que seriam necessários para complementar o cálculo dos esforços internos da estrutura pelo Método dos Deslocamentos.

ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2020

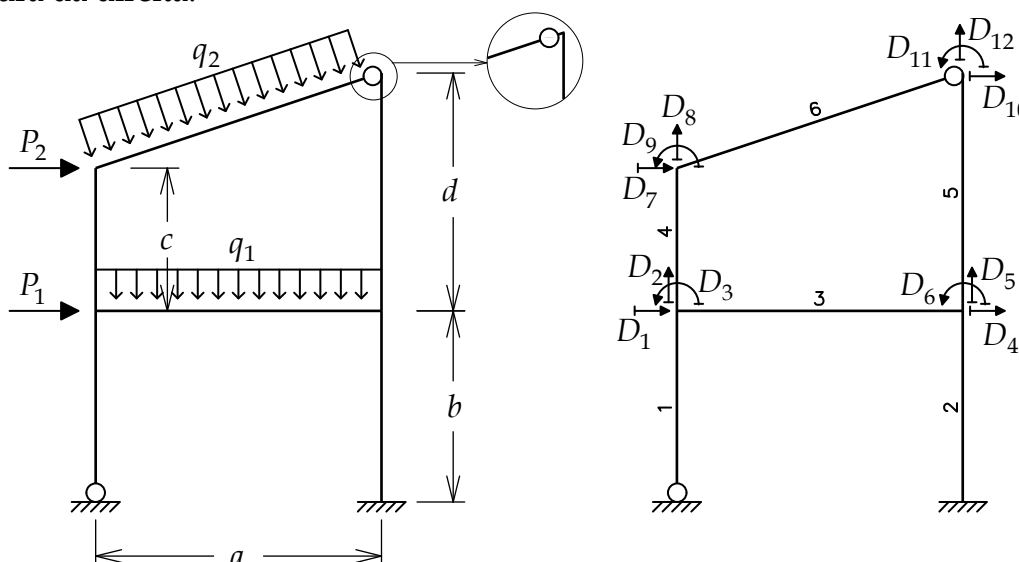
Grau G2 - 3ª Questão - Aplicação: 04/05/2020, 9 hs - Entrega: 11/05/2020, 9 hs

3ª Questão (3,0 pontos)

Empregando-se o Método dos Deslocamentos e com o auxílio do Ftool, obter os diagramas de esforços normais (axiais), esforços cortantes, e momentos fletores para o pórtico plano mostrado abaixo. Alguns passos da solução devem ser mostrados, conforme os itens indicados na próxima página.

Todas as barras têm material com módulo de elasticidade $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ e seção transversal com área $A = 0.0012 \text{ m}^2$ e momento de inércia $I = 0.00036 \text{ m}^4$. Considera-se deformações axiais e por flexão e despreza-se deformações por cisalhamento.

Aa barras e as deslocabilidades globais (D_i) do modelo estrutural estão numeradas conforme indica a figura da direita.



Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	d [m]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]	P_1 [kN]	P_2 [kN]
1321330	6.00	4.00	5.00	7.00	12	14	16.00	17.00
1420321	7.00	3.00	4.00	6.00	14	16	18.00	20.00
1421699	8.00	6.00	3.00	5.00	16	18	20.00	18.00
1511787	9.00	5.00	2.00	4.00	18	12	22.00	21.00
1512423	7.00	5.00	2.00	3.00	14	16	17.00	18.00
1512478	8.00	4.00	3.00	4.00	16	18	19.00	21.00
1520758	9.00	3.00	5.00	6.00	18	12	21.00	19.00
1520812	6.00	6.00	2.00	3.00	12	14	19.00	18.00
1520887	8.00	6.00	4.00	7.00	16	18	18.00	19.00
1520996	9.00	5.00	3.00	6.00	18	12	20.00	22.00
1611378	6.00	4.00	2.00	5.00	12	14	18.00	16.00
1611768	7.00	3.00	3.00	6.00	14	16	20.00	19.00
1612042	9.00	3.00	4.00	6.00	18	18	19.00	20.00
1612589	6.00	6.00	5.00	7.00	12	16	17.00	19.00
1620460	7.00	5.00	3.00	5.00	14	14	19.00	17.00
1711313	8.00	4.00	4.00	6.00	16	12	21.00	20.00
1711666	9.00	3.00	5.00	6.00	18	12	19.00	20.00
1720639	8.00	4.00	2.00	3.00	16	14	18.00	21.00
1920012	7.00	5.00	3.00	4.00	14	16	17.00	17.00
2010186	6.00	6.00	4.00	5.00	12	18	16.00	18.00

Leia com atenção as instruções abaixo e os enunciados dos itens da questão.

A solução da 3ª Questão do grau G2 deve ser entregue na página da disciplina no Moodle/CCEAD em um arquivo em formato PDF com o seguinte nome: **ENG1204-201-G2-Q3-matricula.pdf**, em que **matricula** é o número de matrícula da aluna ou do aluno. Não serão aceitas respostas após 09 hs do dia 11/05/2020.

As respostas devem ser feitas como um relatório da memória de cálculo. A qualidade da apresentação vai ser considerada na avaliação da resposta.

As soluções podem ser feitas à mão em papel e digitalizadas, criadas digitalmente através de algum editor de texto, ou por uma combinação de trechos e desenhos feitos à mão e digitalizados com trechos editados digitalmente.

Opções de configuração no Ftool:

Unidades gerais adotadas: [kN-m] (configure utilizando a opção *Units & Number Formatting...* do menu *Options*).

Unidade para distâncias: [m]; número de casas decimais para distâncias: 2.

Unidade para forças: [kN]; número de casas decimais para forças: 2.

Unidade para momentos: [kNm]; número de casas decimais para momentos: 2.

Unidade para forças distribuídas: [kN/m]; número de casas decimais para forças distribuídas: 0 (nenhuma casa decimal).

Valor e unidade do módulo de elasticidade do material (*Generic Isotropic*) para todas as barras: $E = 2 \times 10^8$ kN/m² (2.0e+08 kN/m²). O demais parâmetros de material não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default*.

Parâmetros de seção transversal (*Generic/Integral Properties*) para todas as barras:

Valor e unidade da área da seção transversal: $A = 0.0012$ m².

Valor e unidade do momento de inércia da seção transversal: $I = 0.00036$ m⁴.

O demais parâmetros de seção transversal não são utilizados nesta solução. Deixar os valores *default* nulos.

Todas as barras dos modelos estruturais são consideradas com deformação por flexão, com deformação axial e sem deformação por cisalhamento (efeito cortante). Para configurar isso no Ftool, no menu *Deformation Constraints* selecione *Flexible Member*, deixe a opção *Axial Deformation* selecionada e deixe a opção *Shear Deformation* NÃO selecionada. Aplique isso para todas as barras.

Pede-se:

Item (3.a) – Diagramas de esforços internos (0,5 ponto)

Mostre os diagramas de esforços normais, esforços cortantes e momentos fletores utilizando as unidades e a precisão numérica (número de casas decimais) indicadas acima.

Item (3.b) – Matriz de rigidez local no sistema global (0,5 ponto)

Mostre as expressões dos coeficientes de rigidez da matriz de rigidez local [k] da barra 1 no sistema global de eixos em função do comprimento b da barra, do módulo de elasticidade E do material, da área A da seção transversal e do momento de inércia I da seção transversal. Calcule numericamente os coeficientes de rigidez locais no sistema global e mostre os valores com sinal e unidades. Utilize uma casa decimal para os coeficientes de rigidez. Você pode verificar os valores comparando com resultados do Ftool para um modelo com a barra 1 isolada.

Item (3.c) – Coeficientes de rigidez global (0,5 ponto)

Mostre as expressões dos coeficientes de rigidez global K_{11} e K_{31} em função dos comprimentos a , b e c , do módulo de elasticidade E , da área A da seção transversal e do momento de inércia I da seção transversal. Calcule numericamente esses coeficientes de rigidez globais e mostre os valores com sinal e unidades. Utilize uma casa decimal para os coeficientes de rigidez. Você pode verificar os valores comparando com resultados do Ftool.

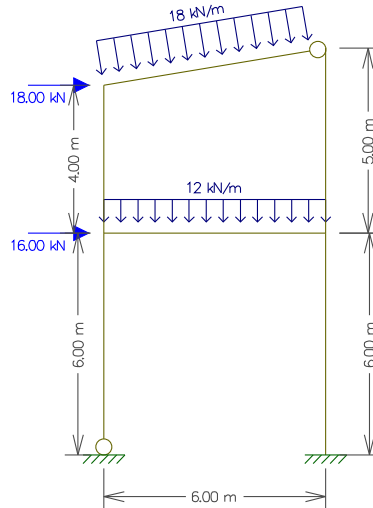
Item (3.d) – Esforços internos finais nas extremidades de barra (1,5 pontos)

Calcule os esforços internos nas extremidades da barra 6 e compare com os resultados obtidos para esta barra pelo Ftool. Os esforços internos devem ser calculados superpondo as reações de engastamento locais provocadas pelo carregamento na barra – caso (0) – com os esforços provocados pelos deslocamentos e rotações dos nós da barra. Nesse cálculo, os deslocamentos e rotações dos nós da barra devem ser obtidos da análise pelo Ftool.

Solução

A solução mostrada corresponde aos seguintes valores para os parâmetros:

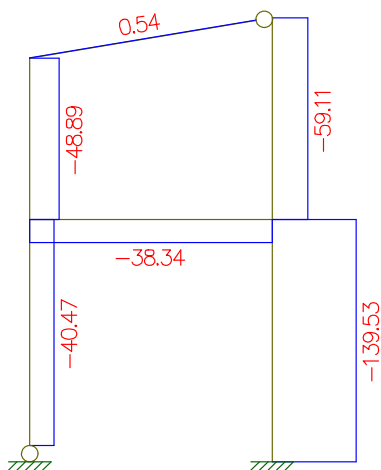
$a = 6 \text{ m}$; $b = 6 \text{ m}$; $c = 4 \text{ m}$; $d = 5 \text{ m}$; $P_1 = 12 \text{ kN}$; $P_2 = 18 \text{ kN}$; $q_1 = 16 \text{ kN/m}$; e $q_2 = 18 \text{ kN/m}$.



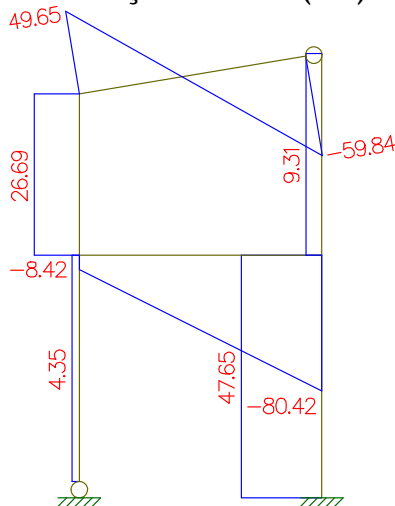
Item (3.a) - Diagramas de esforços internos (0,5 ponto)

Mostre os diagramas de esforços normais, esforços cortantes e momentos.

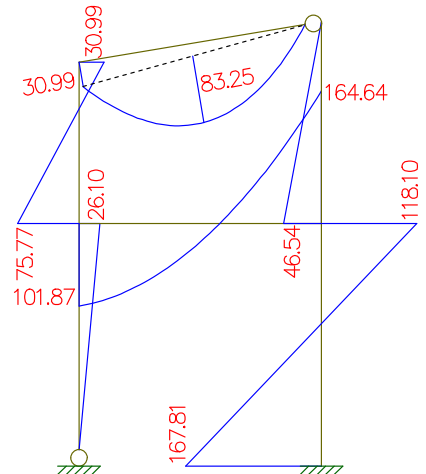
Esforço Normal (kN)



Esforço Cortante (kN)



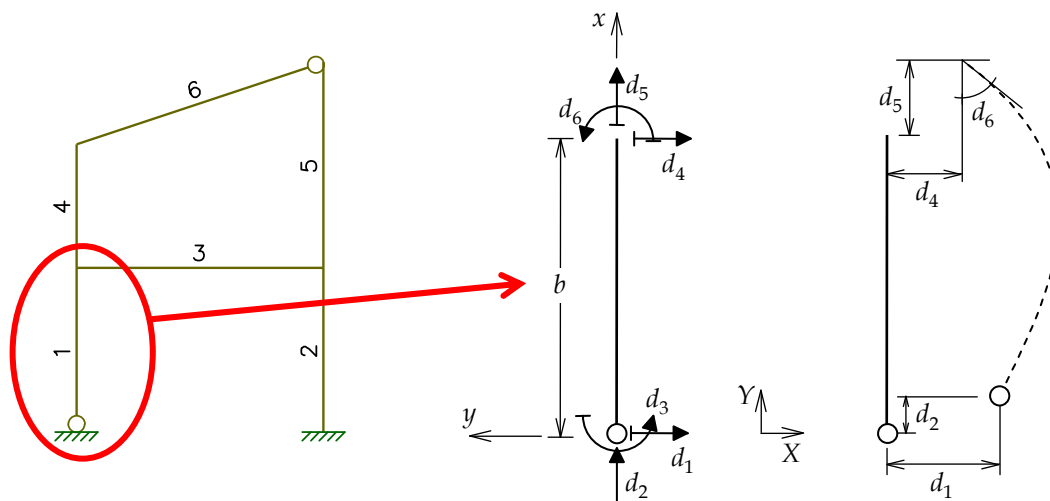
Momento fletor (kN.m)



Item (3.b) - Matriz de rigidez local no sistema global (0,5 ponto)

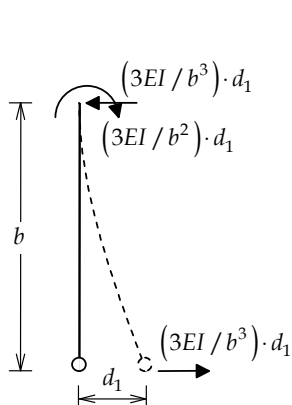
Mostre as expressões dos coeficientes de rigidez da matriz de rigidez local [k] da barra 1 no sistema global de eixos em função do comprimento b da barra, do módulo de elasticidade E do material, da área A da seção transversal e do momento de inércia I da seção transversal. Calcule numericamente os coeficientes de rigidez locais no sistema global e mostre os valores com sinal e unidades. Você pode verificar os valores comparando com resultados do Ftool para um modelo com a barra 1 isolada.

O comprimento da barra 1 na solução é $b = 6$ m. Observe que a matriz de rigidez local considera todas as deslocabilidades da barra, sendo que a deslocabilidade d_3 não é considerada porque a barra é articulada na extremidade inferior.



Cálculo dos coeficientes de rigidez locais nas direções dos eixos locais da barra 1 e verificação com o Ftool.

A matriz de rigidez local é montada por coluna, sendo que cada coluna é formada pelos coeficientes de rigidez locais associados à imposição de uma deslocabilidade isolada.



Deslocabilidade d_1

$$k_{11} = \frac{3EI}{b^3} = 1000 \text{ kN/m}$$

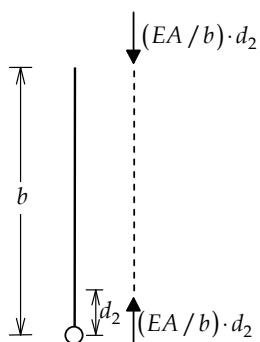
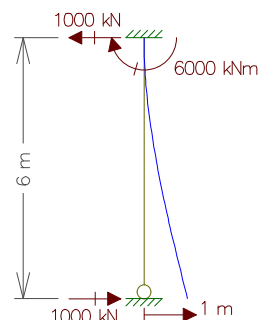
$$k_{21} = 0$$

$$k_{31} = 0$$

$$k_{41} = -\frac{3EI}{b^3} = -1000 \text{ kN/m}$$

$$k_{51} = 0$$

$$k_{61} = -\frac{3EI}{b^2} = -6000 \text{ kNm/m}$$



Deslocabilidade d_2

$$k_{12} = 0$$

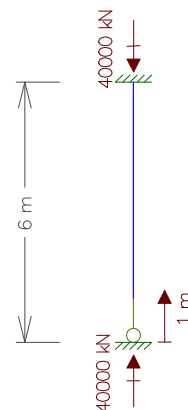
$$k_{22} = \frac{EA}{b} = 40000 \text{ kN/m}$$

$$k_{32} = 0$$

$$k_{42} = 0$$

$$k_{52} = -\frac{EA}{b} = -40000 \text{ kN/m}$$

$$k_{62} = 0$$

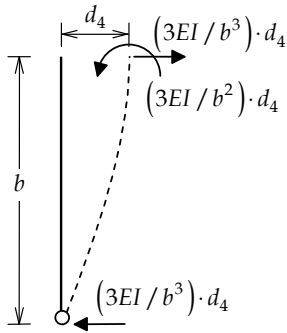


Deslocabilidade d_3

Todos os coeficientes de rigidez são nulos porque a barra é articulada na extremidade inicial:

$$k_{13} = 0 \quad k_{23} = 0 \quad k_{33} = 0 \quad k_{43} = 0 \quad k_{53} = 0 \quad k_{63} = 0$$

Deslocabilidade d_4



$$k_{14} = -\frac{3EI}{b^3} = -1000 \text{ kN/m}$$

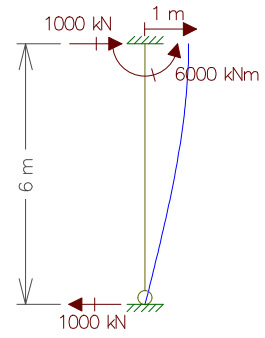
$$k_{24} = 0$$

$$k_{34} = 0$$

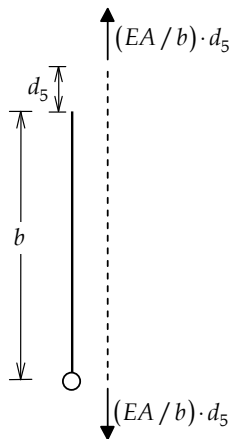
$$k_{44} = \frac{3EI}{b^3} = 1000 \text{ kN/m}$$

$$k_{54} = 0$$

$$k_{64} = \frac{3EI}{b^2} = 6000 \text{ kNm/m}$$



Deslocabilidade d_5



$$k_{15} = 0$$

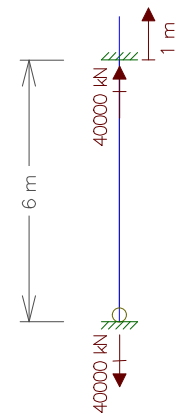
$$k_{25} = -\frac{EA}{b} = -40000 \text{ kN/m}$$

$$k_{35} = 0$$

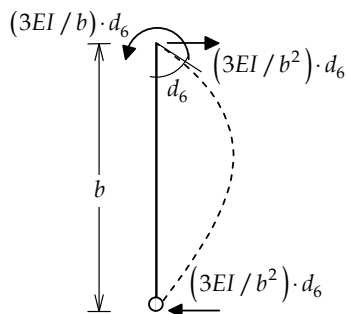
$$k_{45} = 0$$

$$k_{55} = \frac{EA}{b} = 40000 \text{ kN/m}$$

$$k_{65} = 0$$



Deslocabilidade d_6



$$k_{16} = -\frac{3EI}{b^2} = -6000 \text{ kN/rad}$$

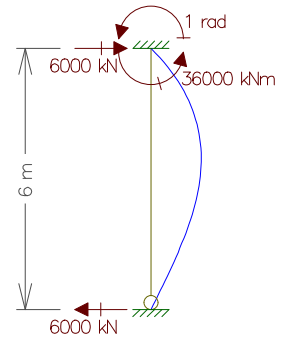
$$k_{26} = 0$$

$$k_{36} = 0$$

$$k_{46} = \frac{3EI}{b^2} = 6000 \text{ kN/rad}$$

$$k_{56} = 0$$

$$k_{66} = \frac{3EI}{b} = 36000 \text{ kNm/rad}$$



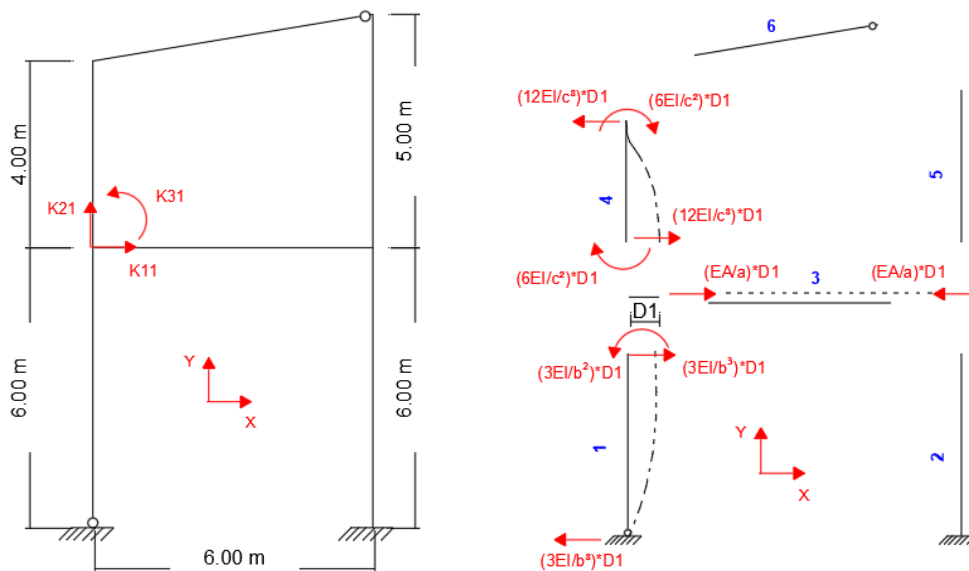
Matriz de rigidez local da barra 1 no sistema global

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{b^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{b^3} & 0 & -\frac{3EI}{b^2} \\ 0 & \frac{EA}{b} & 0 & 0 & -\frac{EA}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{b^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{b^3} & 0 & \frac{3EI}{b^2} \\ 0 & -\frac{EA}{b} & 0 & 0 & \frac{EA}{b} & 0 \\ -\frac{3EI}{b^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{b^2} & 0 & \frac{3EI}{b} \end{bmatrix}$$

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & -6000 \\ 0 & 40000 & 0 & 0 & -40000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 6000 \\ 0 & -40000 & 0 & 0 & 40000 & 0 \\ -6000 & 0 & 0 & 6000 & 0 & 36000 \end{bmatrix}$$

Item (3.c) - Coeficientes de rigidez global (0,5 ponto)

Mostre as expressões dos coeficientes de rigidez global K_{11} e K_{31} em função dos comprimentos a , b e c , do módulo de elasticidade E , da área A da seção transversal e do momento de inércia I da seção transversal. Calcule numericamente esses coeficientes de rigidez globais e mostre os valores com sinal e unidades. Você pode verificar os valores comparando com resultados do Ftool.



$$K_{11} = \frac{3EI}{b^3} + \frac{EA}{a} + \frac{12EI}{c^3}$$

$$K_{11} = 54500 \text{ kN/m}$$

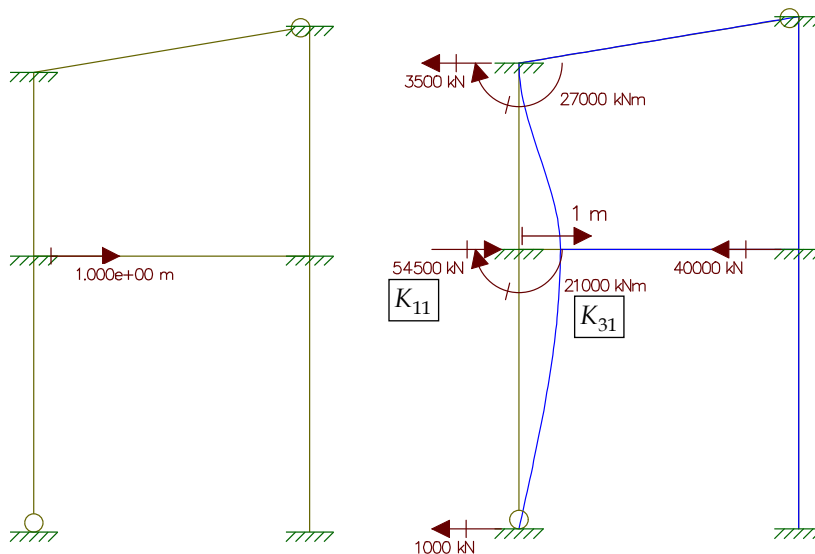
$$K_{21} = 0 + 0 + 0$$

$$K_{21} = 0$$

$$K_{31} = \frac{3EI}{b^2} + 0 - \frac{6EI}{c^2}$$

$$K_{31} = -21000 \text{ kNm/m}$$

Verificação dos valores com o Ftool. Impondo uma deslocabilidade $D_1=1$ m:

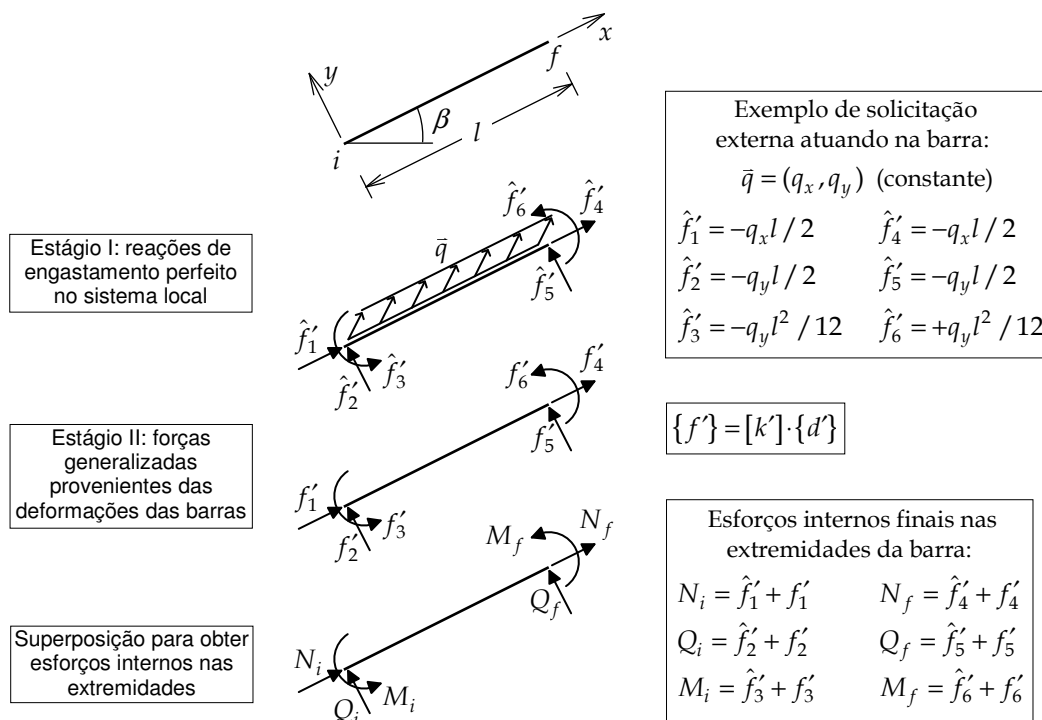


Verifica-se que os mesmos valores são encontrados.

Item (3.d) – Esforços internos finais nas extremidades de barra (1,5 pontos)

Calcule os esforços internos nas extremidades da barra 6 e compare com os resultados obtidos para esta barra pelo Ftool. Os esforços internos devem ser calculados superpondo as reações de engastamento locais provocadas pelo carregamento na barra – caso (0) – com os esforços provocados pelos deslocamentos e rotações dos nós da barra. Nesse cálculo, os deslocamentos e rotações dos nós da barra devem ser obtidos da análise pelo Ftool.

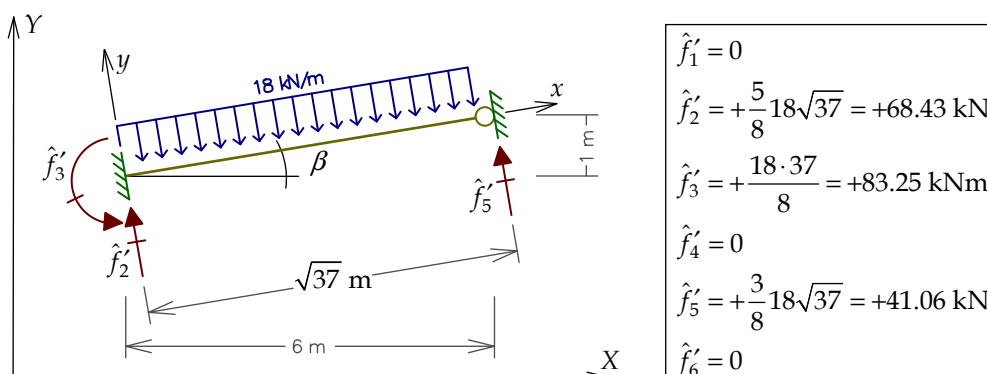
O cálculo dos esforços internos nas extremidades da barra é feito, depois de determinados os valores dos deslocamentos e rotações dos nós da estrutura, o efeito em dois estágios, tal como indicado na figura abaixo para uma barra genérica.



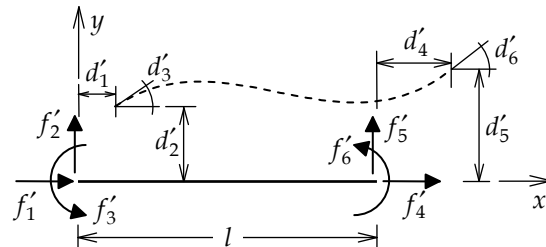
Esforços internos nas extremidades da barra seguem a convenção em que os sinais estão associados aos sentidos em relação aos eixos locais.

O estágio I corresponde ao efeito local de engastamento perfeito para a carga aplicada no interior da barra e o estágio II corresponde à superposição dos efeitos provocados por cada uma das deslocabilidades da barra. Pode-se identificar o estágio I com o caso básico (0) da solução pelo método dos deslocamentos e o estágio II como a superposição dos efeitos das deslocabilidades dos demais casos básicos na barra.

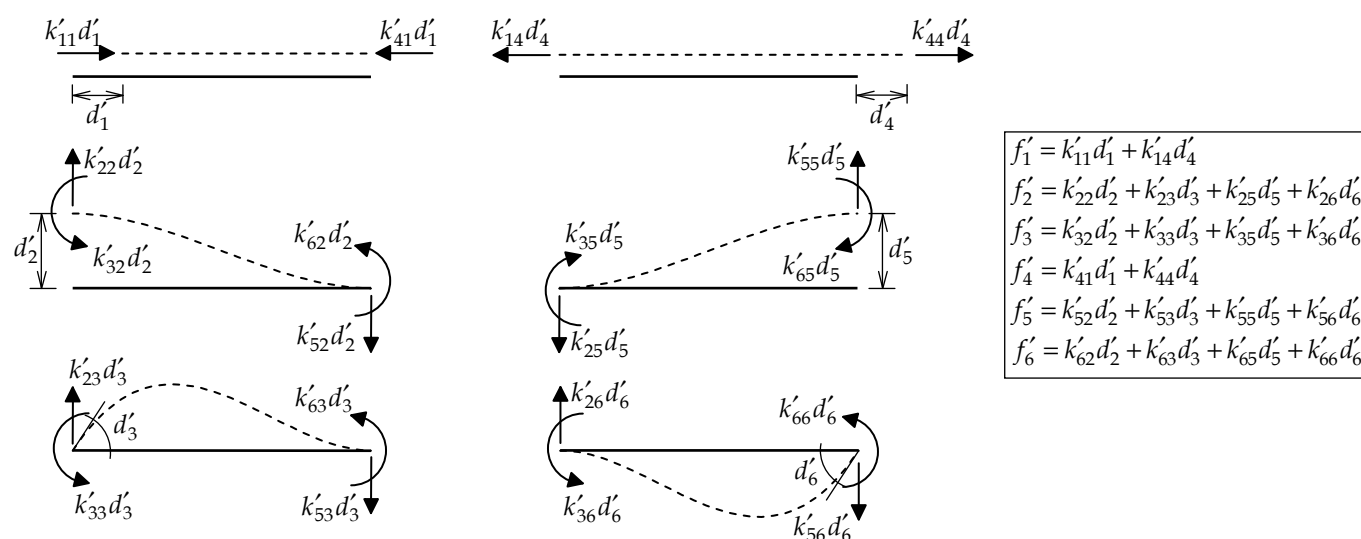
Estágio I para a barra 6:



O estágio II é o efeito das deformações provocadas pelos deslocamentos e rotações dos nós nas extremidades da barra. O estágio II pode ser condensado pelo produto da matriz de rigidez local da barra pelo vetor das deslocabilidades locais, todos no sistema de eixos locais da barra. Isso é mostrado abaixo para uma barra genérica sem articulação.

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & 0 & 0 & k'_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{22} & k'_{23} & 0 & k'_{25} & k'_{26} \\ 0 & k'_{32} & k'_{33} & 0 & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{41} & 0 & 0 & k'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{52} & k'_{53} & 0 & k'_{55} & k'_{56} \\ 0 & k'_{62} & k'_{63} & 0 & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\{f'\} = [k'] \cdot \{d'\}}$$


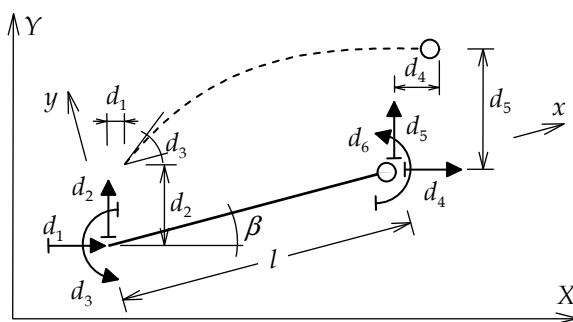
A matriz de rigidez local no sistema de eixos locais expressa a superposição dos efeitos isolados de cada deslocabilidade da barra mostrados na figura.



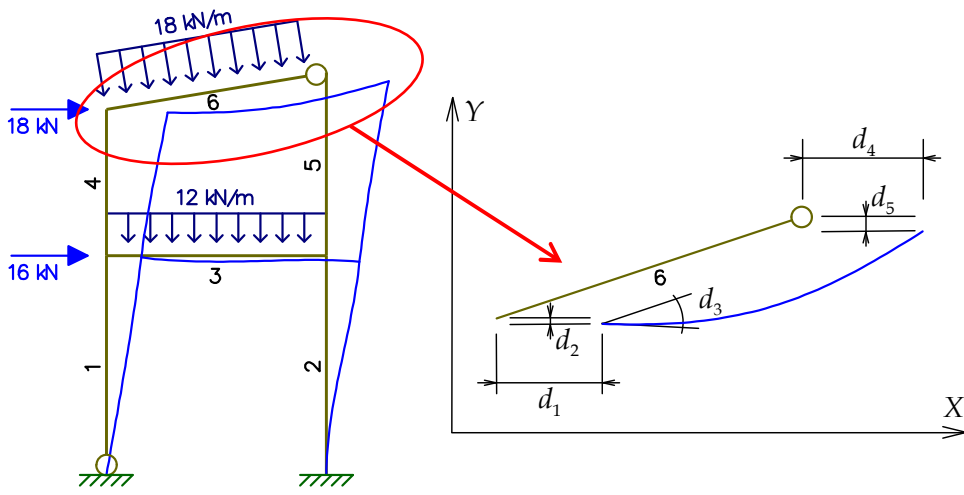
Entretanto, a solução global do sistema de equações de equilíbrio do método dos deslocamentos fornece os valores dos deslocamentos e rotações dos nós da estrutura (deslocabilidades globais $\{D\}$) na direções dos eixos globais do modelo. Portanto, para obter os valores das deslocabilidades locais da barra no sistema local ($\{d'\}$) é preciso primeiro extrair do vetor global $\{D\}$ os valores das deslocabilidades locais da barra no sistema global ($\{d\}$) para depois transformar por rotação o vetor $\{d\}$ no vetor $\{d'\}$:

$$\{D\} \rightarrow \{d\} \qquad \{d'\} = [R]\{d\}$$

Vetor das deslocabilidades locais da barra 6 no sistema global ($\{d\}$):

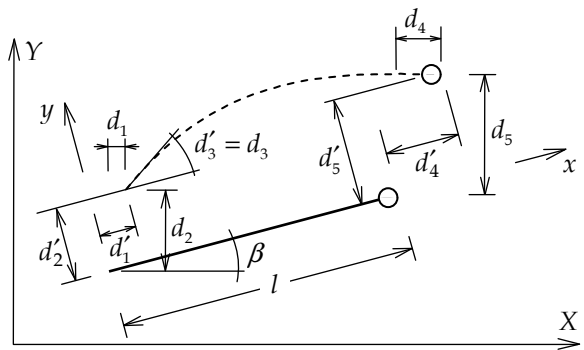


Extração dos valores das deslocabilidades locais da barra no sistema global ($\{d\}$) do vetor das deslocabilidades globais $\{D\}$ obtido da solução pelo Ftool:



$$\begin{aligned}
 d_1 = D_7 &= +3.337320 \times 10^{-2} \text{ m} \\
 d_2 = D_8 &= -1.826458 \times 10^{-3} \text{ m} \\
 d_3 = D_9 &= -3.699777 \times 10^{-3} \text{ rad} \\
 d_4 = D_{10} &= +3.386921 \times 10^{-2} \text{ m} \\
 d_5 = D_{11} &= -4.719850 \times 10^{-3} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Cálculo das deslocabilidades locais no sistema local ($\{d'\}$):

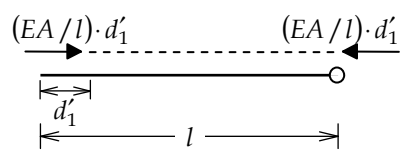


$$\begin{aligned}
 d'_1 &= +d_1 \cdot \cos\beta + d_2 \cdot \sin\beta \\
 d'_2 &= -d_1 \cdot \sin\beta + d_2 \cdot \cos\beta \\
 d'_3 &= d_3 \\
 d'_4 &= +d_4 \cdot \cos\beta + d_5 \cdot \sin\beta \\
 d'_5 &= -d_4 \cdot \sin\beta + d_5 \cdot \cos\beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l &= \sqrt{(X_f - X_i)^2 + (Y_f - Y_i)^2} = \sqrt{37} \text{ m} \\
 \cos\beta &= (X_f - X_i) / l = 6 / \sqrt{37} \\
 \sin\beta &= (Y_f - Y_i) / l = 1 / \sqrt{37}
 \end{aligned}$$

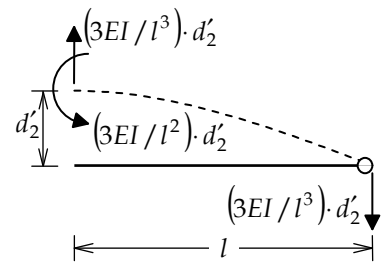
$$\begin{aligned}
 d'_1 &= +3.337320 \times 10^{-2} \cdot (6 / \sqrt{37}) - 1.826458 \times 10^{-3} \cdot (1 / \sqrt{37}) = +3.261885 \times 10^{-2} \text{ m} \\
 d'_2 &= -3.337320 \times 10^{-2} \cdot (1 / \sqrt{37}) - 1.826458 \times 10^{-3} \cdot (6 / \sqrt{37}) = -7.288127 \times 10^{-3} \text{ m} \\
 d'_3 &= 3.699777 \times 10^{-3} \text{ rad} \\
 d'_4 &= +3.386921 \times 10^{-2} \cdot (6 / \sqrt{37}) - 4.719850 \times 10^{-3} \cdot (1 / \sqrt{37}) = +3.263244 \times 10^{-2} \text{ m} \\
 d'_5 &= -3.386921 \times 10^{-2} \cdot (1 / \sqrt{37}) - 4.719850 \times 10^{-3} \cdot (6 / \sqrt{37}) = -1.022370 \times 10^{-2} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Cálculo dos coeficientes de rigidez locais no sistema local (k'_{ij}):



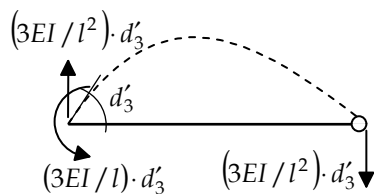
$$\begin{aligned}
 k'_{11} &= + \frac{EA}{\sqrt{37}} = +39455.8 \text{ kN/m} \\
 k'_{21} &= 0 \\
 k'_{31} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k'_{41} &= - \frac{EA}{\sqrt{37}} = -39455.8 \text{ kN/m} \\
 k'_{51} &= 0 \\
 k'_{61} &= 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 k'_{12} &= 0 \\
 k'_{22} &= + \frac{3EI}{(\sqrt{37})^3} = +959.7 \text{ kN/m} \\
 k'_{32} &= + \frac{3EI}{(\sqrt{37})^2} = +5837.8 \text{ kNm/m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k'_{42} &= 0 \\
 k'_{52} &= - \frac{3EI}{(\sqrt{37})^3} = -959.7 \text{ kN/m} \\
 k'_{62} &= 0
 \end{aligned}$$



$$k'_{13} = 0$$

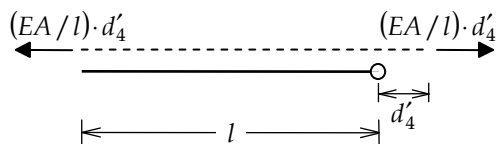
$$k'_{43} = 0$$

$$k'_{23} = +\frac{3EI}{(\sqrt{37})^2} = +5837.8 \text{ kN/rad}$$

$$k'_{53} = -\frac{3EI}{(\sqrt{37})^2} = -5837.8 \text{ kN/rad}$$

$$k'_{33} = +\frac{3EI}{\sqrt{37}} = +35510.2 \text{ kNm/rad}$$

$$k'_{63} = 0$$



$$k'_{14} = -\frac{EA}{\sqrt{37}} = -1459863.0 \text{ kN/m}$$

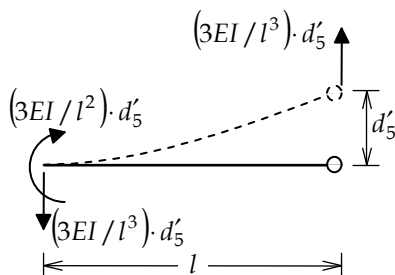
$$k'_{44} = +\frac{EA}{\sqrt{37}} = +1459863.0 \text{ kN/m}$$

$$k'_{24} = 0$$

$$k'_{54} = 0$$

$$k'_{34} = 0$$

$$k'_{64} = 0$$



$$k'_{15} = 0$$

$$k'_{45} = 0$$

$$k'_{25} = -\frac{3EI}{(\sqrt{37})^3} = -959.7 \text{ kN/m}$$

$$k'_{55} = +\frac{3EI}{(\sqrt{37})^3} = +959.7 \text{ kN/m}$$

$$k'_{35} = -\frac{3EI}{(\sqrt{37})^2} = -5837.8 \text{ kNm/m}$$

$$k'_{65} = 0$$

Cálculo das forças generalizadas locais provocadas pelas deslocabilidades locais no sistema local ($\{f'\}$):

$$f'_1 = k'_{11}d'_1 + k'_{14}d'_4$$

$$f'_1 = (+39455.8) \cdot (+3.261885 \times 10^{-2}) + (-39455.8) \cdot (+3.2632444 \times 10^{-2}) = -0.54 \text{ kN}$$

$$f'_2 = k'_{22}d'_2 + k'_{23}d'_3 + k'_{25}d'_5$$

$$f'_2 = (+959.7) \cdot (-7.288127 \times 10^{-3}) + (+5837.8) \cdot (-3.699777 \times 10^{-3}) + (-959.7) \cdot (-1.022370 \times 10^{-2}) = -18.78 \text{ kN}$$

$$f'_3 = k'_{32}d'_2 + k'_{33}d'_3 + k'_{35}d'_5$$

$$f'_3 = (+5837.8) \cdot (-7.288127 \times 10^{-3}) + (+35510.2) \cdot (-3.699777 \times 10^{-3}) + (-5837.8) \cdot (-1.022370 \times 10^{-2}) = -114.24 \text{ kN}$$

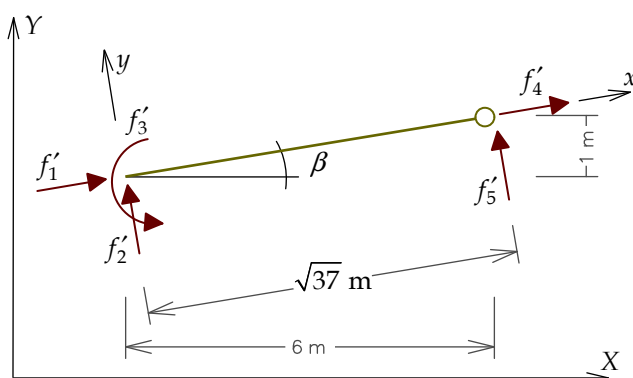
$$f'_4 = k'_{14}d'_4 + k'_{44}d'_4$$

$$f'_4 = (-39455.8) \cdot (+3.261885 \times 10^{-2}) + (+39455.8) \cdot (+3.2632444 \times 10^{-2}) = +0.54 \text{ kN}$$

$$f'_5 = k'_{52}d'_2 + k'_{53}d'_3 + k'_{55}d'_5$$

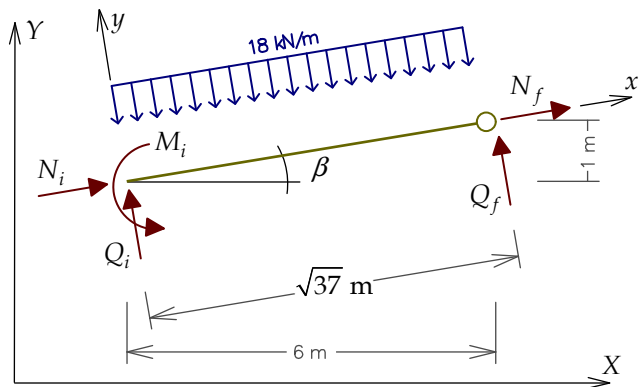
$$f'_5 = (-959.7) \cdot (-7.288127 \times 10^{-3}) + (-5837.8) \cdot (-3.699777 \times 10^{-3}) + (+959.7) \cdot (-1.022370 \times 10^{-2}) = +18.78 \text{ kN}$$

Estágio II para a barra 6:



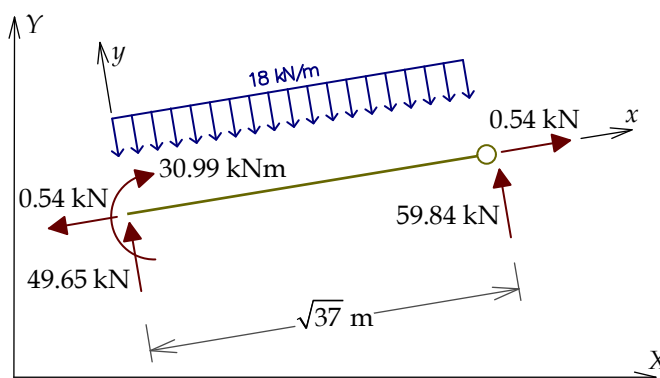
$f'_1 = -0.54 \text{ kN}$
$f'_2 = -18.78 \text{ kN}$
$f'_3 = -114.24 \text{ kNm}$
$f'_4 = +0.54 \text{ kN}$
$f'_5 = +18.78 \text{ kN}$
$f'_6 = 0$

Esforços internos finais nas extremidades da barra 6: superposição dos estágios I e II:



$$\begin{aligned}
 N_i &= \hat{f}'_1 + f'_1 = 0 - 0.54 = -0.54 \text{ kN} \\
 Q_i &= \hat{f}'_2 + f'_2 = +68.43 - 18.78 = +49.65 \text{ kN} \\
 M_i &= \hat{f}'_3 + f'_3 = +83.25 - 114.24 = -30.99 \text{ kNm} \\
 N_f &= \hat{f}'_4 + f'_4 = 0 + 0.54 = +0.54 \text{ kN} \\
 Q_f &= \hat{f}'_5 + f'_5 = +41.06 + 18.78 = +59.84 \text{ kN} \\
 M_f &= \hat{f}'_6 + f'_6 = 0
 \end{aligned}$$

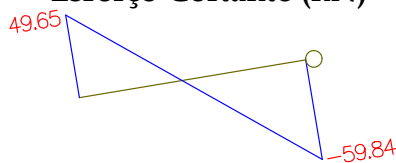
Comparação com os diagramas de esforços internos obtidos pelo Ftool para a barra 6:



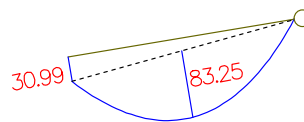
Esforço Normal (kN)



Esforço Cortante (kN)



Momento fletor (kN.m)



ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2020

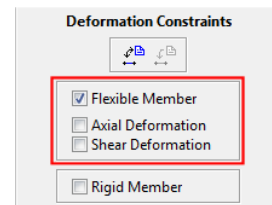
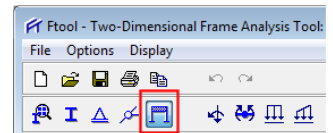
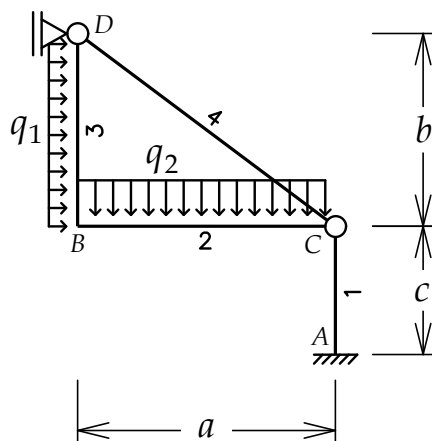
Grau G2 - 4ª Questão - Aplicação: 25/05/2020, 9 hs - Entrega: 01/06/2020, 9 hs

3ª Questão (3,0 pontos)

Empregando-se o Método dos Deslocamentos, obter o diagrama de momentos fletores para o pórtico plano mostrado abaixo com barras inextensíveis. Todos os passos da solução devem ser mostrados.

Despreza-se deformações axiais e deformações por cisalhamento. Considera-se apenas deformações por flexão. Todas as barras têm material com módulo de elasticidade $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ e seção transversal com área $A = 0.0012 \text{ m}^2$ e momento de inércia $I = 0.00036 \text{ m}^4$. A área da seção transversal não é utilizada porque são barras inextensíveis.

Sugestão: Crie o seu modelo estrutural no Ftool e verifique quais são as deslocabilidades do problema. Não se esqueça de especificar todas as barras sem deformação axial e sem deformação por cisalhamento conforme indicado abaixo. Você pode verificar os valores dos termos de carga e coeficientes de rigidez globais pelo Ftool.



Consulte pelo seu número de matrícula os dados do seu modelo na tabela fornecida.

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]
1321330	3.50	3.50	2.00	8	16
1420321	4.00	3.50	3.00	10	14
1421699	4.50	4.00	4.00	12	12
1511787	5.00	4.00	5.00	14	10
1512423	5.50	4.50	2.00	16	8
1512478	6.00	4.50	3.00	8	16
1520758	6.50	5.00	4.00	10	14
1520812	7.00	5.00	5.00	12	12
1520887	7.50	5.50	2.00	14	10
1520996	8.00	5.50	3.00	16	8
1611378	3.50	6.00	4.00	8	16
1611768	4.00	6.00	5.00	10	14
1612042	4.50	5.50	2.00	12	12
1612589	5.00	5.50	3.00	14	10
1620460	5.50	5.00	4.00	16	8
1711313	6.00	5.00	5.00	8	16
1711666	6.50	4.50	2.00	10	14
1720639	7.00	4.50	3.00	12	12
1920012	7.50	4.00	4.00	14	10
2010186	8.00	4.00	5.00	16	8

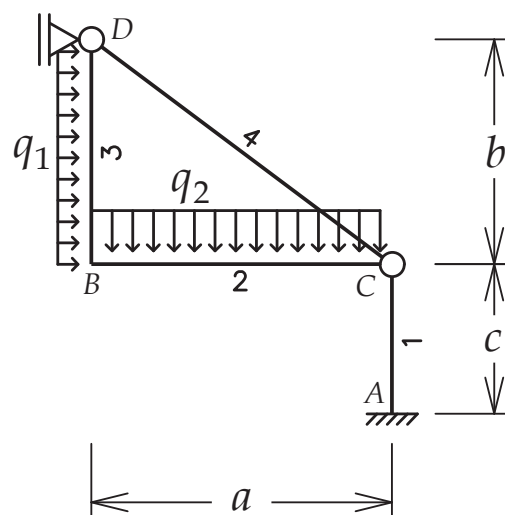
PUC-Rio - Análise de Estruturas II - Luiz Fernando Martha

ENG 1204 – Solução da questão Q4 do grau G2

Método dos Deslocamentos

Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

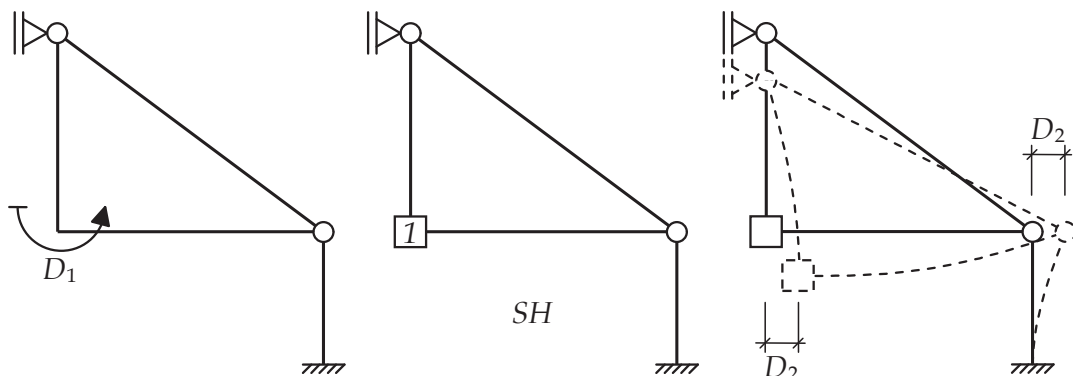


Todas as barras são inextensíveis, com inércia à flexão EI constante.

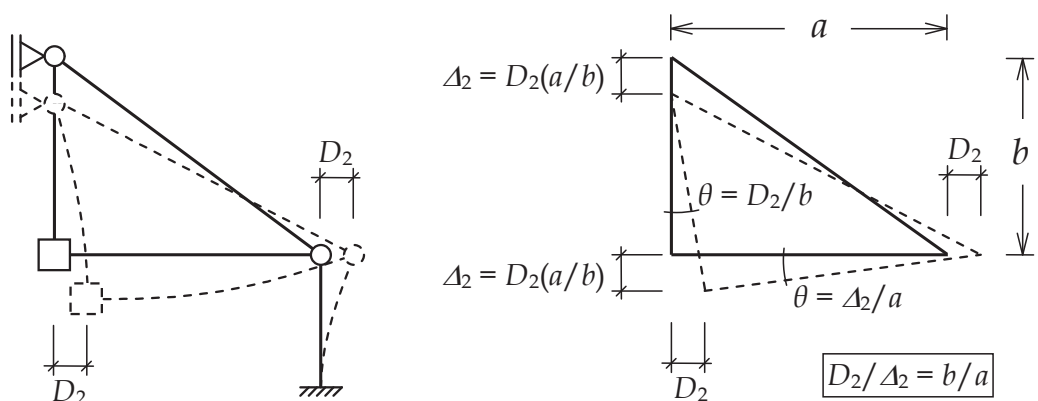
Pede-se o diagrama de momentos fletores.

Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

*Deslocabilidade interna e chapa fictícia no Sistema Hipergeométrico:
(o pórtico ainda apresenta uma deslocabilidade externa)*



Observações sobre a configuração deformada do pórtico

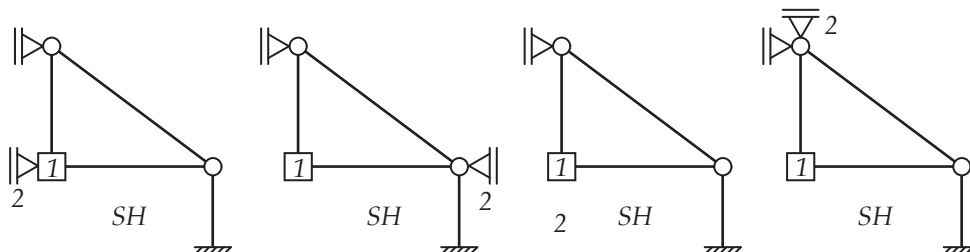


- Considerando que os deslocamentos são pequenos, os ângulos podem ser aproximados por suas tangentes.
- Vê-se que o triângulo de barras sofre uma rotação de corpo rígido, ainda que as barras tenham deformação por flexão.

Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

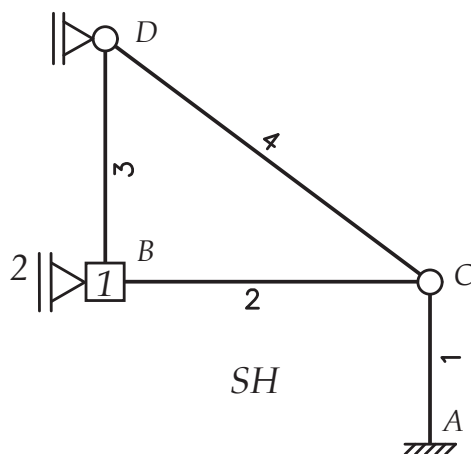
Como o triângulo tem uma rotação de corpo rígido, o apoio do 1º gênero a ser inserido também deve prender essa rotação.

Alternativas para o apoio fictício 2 do Sistema Hipergeométrico:



Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

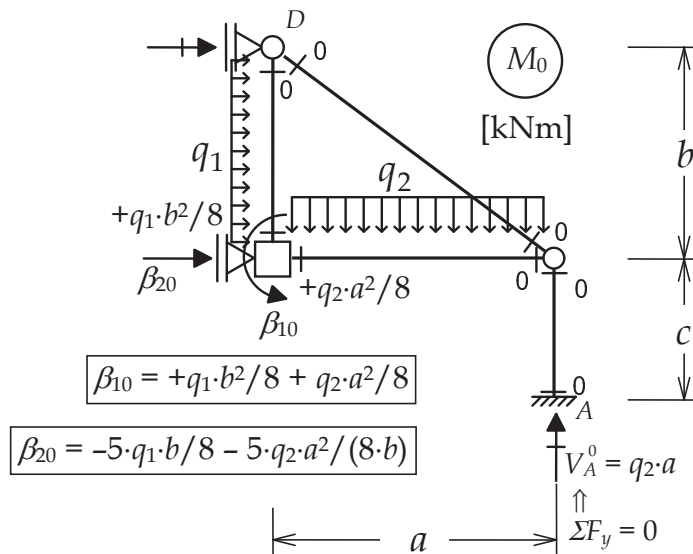
Sistema Hipergeométrico adotado:



Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

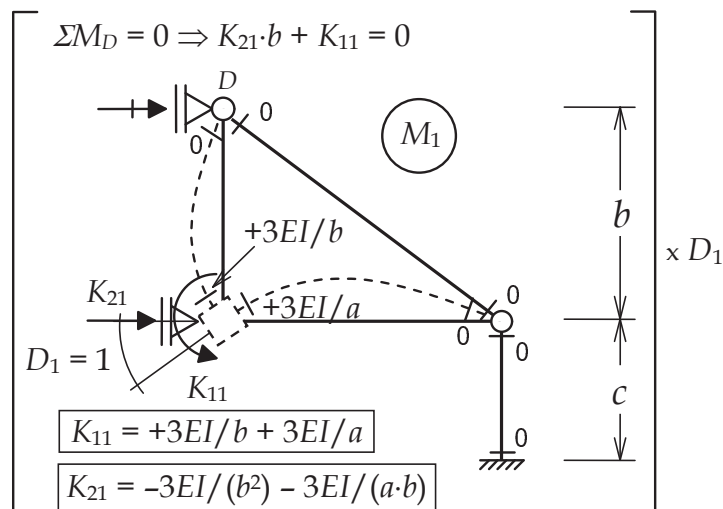
Caso (0) - Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow +\beta_{20} \cdot b + \beta_{10} + (q_1 \cdot b) \cdot (b/2) - (q_2 \cdot a) \cdot (a/2) + V_A^0 \cdot a = 0$$



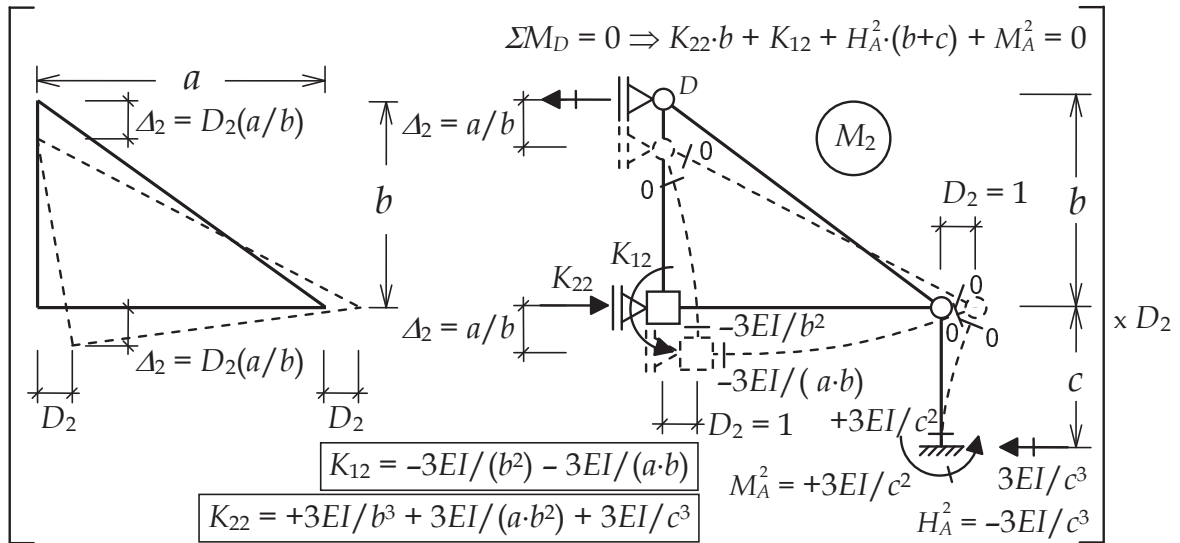
Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

Caso (1) - Deslocabilidade D_1 isolada no SH



Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

Caso (2) - Deslocabilidade D_2 isolada no SH



Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

Equações de equilíbrio e cálculo das deslocabilidades:

$$\beta_{10} = +q_1 \cdot b^2/8 + q_2 \cdot a^2/8$$

$$\beta_{20} = -5 \cdot q_1 \cdot b/8 - 5 \cdot q_2 \cdot a^2/(8 \cdot b)$$

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 = 0 \end{cases}$$

$$K_{11} = +3EI/b + 3EI/a$$

$$K_{12} = K_{21} = -3EI/(b^2) - 3EI/(a \cdot b)$$

$$K_{22} = +3EI/b^3 + 3EI/(a \cdot b^2) + 3EI/c^3$$

$$D_1 = \Lambda_1 / EI$$

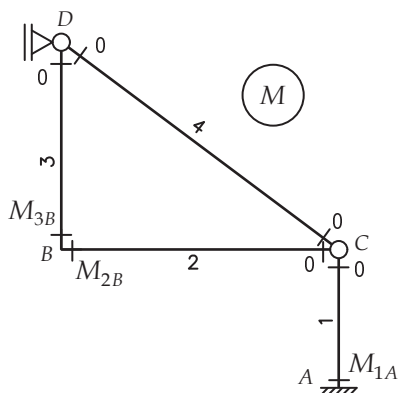
$$\Lambda_1 = \frac{(q_2 a^2 + q_1 b^2)(-ab^3 + 4bc^3 + 4ac^3)}{24 b^2 (a+b)}$$

$$D_2 = \Lambda_2 / EI$$

$$\Lambda_2 = \frac{c^3 (q_2 a^2 + q_1 b^2)}{6 b}$$

Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

Diagrama de momentos fletores finais: $M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2$



$$M_{3B} = +\frac{q_1 b^2}{8} + \frac{3\Lambda_1}{b} - \frac{3\Lambda_2}{b^2} = -M_{2B}$$

$$M_{2B} = +\frac{q_2 a^2}{8} + \frac{3\Lambda_1}{a} - \frac{3\Lambda_2}{a \cdot b} = -M_{3B}$$

$$M_{1A} = +\frac{3\Lambda_2}{c^2}$$

Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

Matrícula	a [m]	b [m]	c [m]	q_1 [kN/m]	q_2 [kN/m]	M_{3B} [kNm]	M_{2B} [kNm]	M_{1A} [kNm]
1321330	3.50	3.50	2.00	8	16	-6.1	6.1	84.0
1420321	4.00	3.50	3.00	10	14	-7.8	7.8	148.5
1421699	4.50	4.00	4.00	12	12	-4.8	4.8	217.5
1511787	5.00	4.00	5.00	14	10	-4.9	4.9	296.3
1512423	5.50	4.50	2.00	16	8	1.6	-1.6	125.8
1512478	6.00	4.50	3.00	8	16	-32.5	32.5	246.0
1520758	6.50	5.00	4.00	10	14	-28.2	28.2	336.6
1520812	7.00	5.00	5.00	12	12	-27.3	27.3	444.0
1520887	7.50	5.50	2.00	14	10	-18.2	18.2	179.3
1520996	8.00	5.50	3.00	16	8	-13.3	13.3	271.6
1611378	3.50	6.00	4.00	8	16	13.7	-13.7	161.3
1611768	4.00	6.00	5.00	10	14	15.8	-15.8	243.3
1612042	4.50	5.50	2.00	12	12	11.3	-11.3	110.2
1612589	5.00	5.50	3.00	14	10	12.8	-12.8	183.7
1620460	5.50	5.00	4.00	16	8	8.0	-8.0	256.8
1711313	6.00	5.00	5.00	8	16	-27.9	27.9	388.0
1711666	6.50	4.50	2.00	10	14	-33.3	33.3	176.4
1720639	7.00	4.50	3.00	12	12	-32.9	32.9	277.0
1920012	7.50	4.00	4.00	14	10	-36.1	36.1	393.3
2010186	8.00	4.00	5.00	16	8	-32.0	32.0	480.0

Pórtico com barras inextensíveis e triângulo com giro

Diagrama de momentos fletores finais: $M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2$

Adotando $a = 4$ m; $b = 3$ m; $c = 2$ m; $q_1 = 8$ kN/m; $q_2 = 16$ kN/m:

