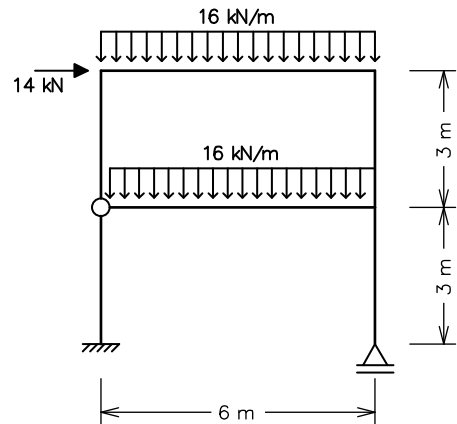


ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2011

Primeira Prova - Data: 05/09/2011 - Duração: 2:45 hs - Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)

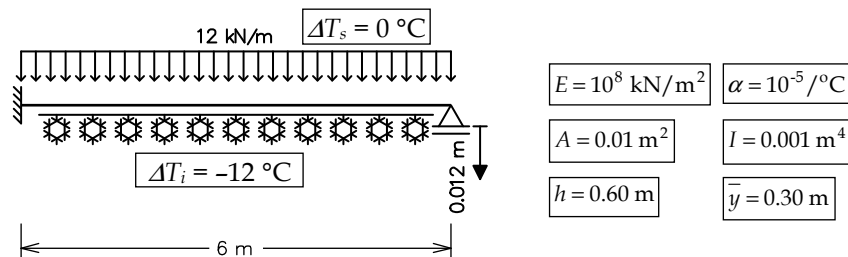
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 1.2 \times 10^4 \text{ kNm}^2$.



2ª Questão (3,5 pontos)

Para a viga mostrada abaixo, pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. O material tem módulo de elasticidade $E = 10^8 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. As barras da viga têm uma seção transversal com área $A = 0.01 \text{ m}^2$, momento de inércia $I = 0.001 \text{ m}^4$, altura $h = 0.60 \text{ m}$ e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam na viga concomitantemente:

- Carregamento com uma força uniformemente distribuída com a intensidade indicada.
- Resfriamento de $\Delta T_i = -12 ^\circ\text{C}$ na face inferior da viga e nenhuma variação de temperatura na face superior.
- Recalque vertical, para baixo, de 1.2 cm (0.012 m) do apoio da direita.



Sabe-se:

- (i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
- $$du^T = \alpha \Delta T_{CG} dx$$
- sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

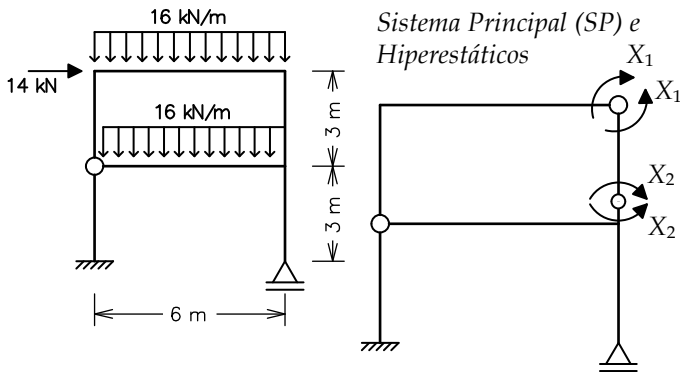
- (ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
- $$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$
- sendo ΔT_i a variação de temperatura das fibras inferiores (face interna) e ΔT_s a variação de temperatura das fibras superiores (face externa) do pilar na esquerda.

3ª Questão (1,0 ponto) - Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

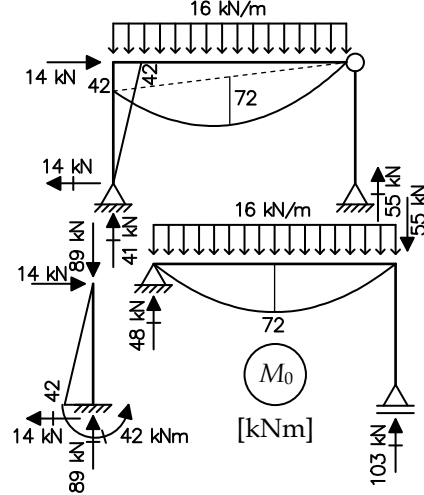
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

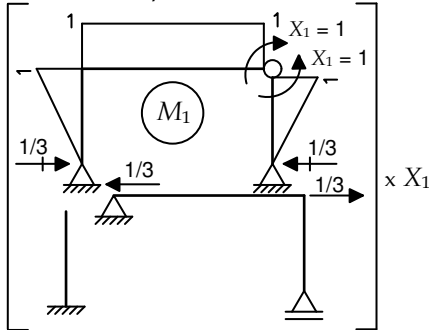
1ª Questão



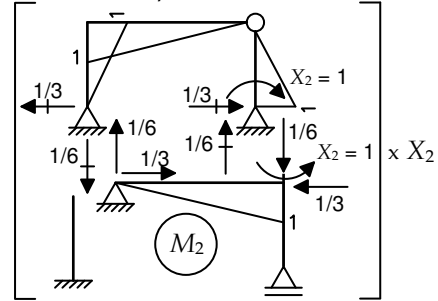
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -456 \\ +414 \end{bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} +8 & -7/2 \\ -7/2 & +6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +36 \text{ kNm} \\ X_2 = -48 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 42 \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 42 \cdot 3 \right] = -\frac{456}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 42 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 42 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 6 \right] = +\frac{414}{EI}$$

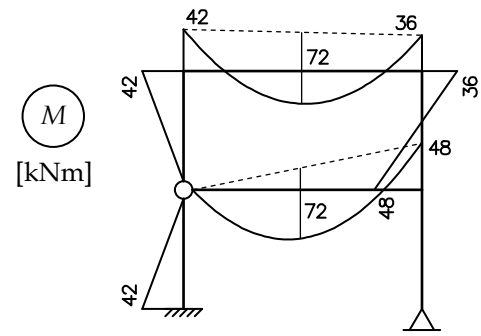
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right) \right] = +\frac{8}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right) \right] = +\frac{6}{EI}$$

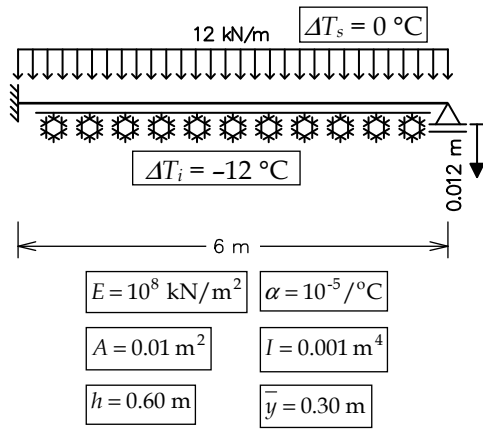
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right] = -\frac{7}{2EI}$$

Momentos Fletores Finais:

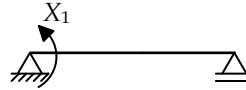
$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$



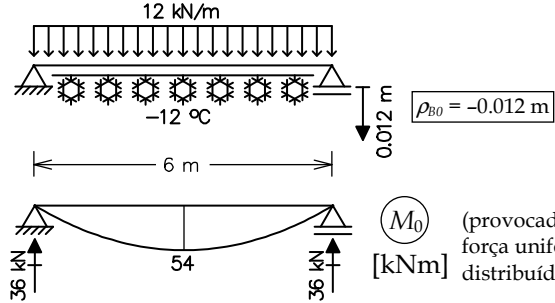
2ª Questão



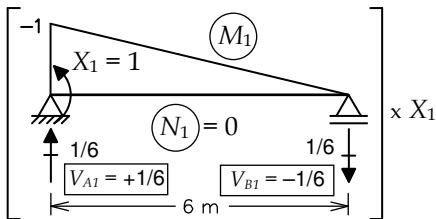
Sistema Principal e Hiperestático ($g = 1$)



Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



$$\delta_{11} = \int_{\text{viga}} \frac{(M_1)^2}{EI} dx$$

$$\delta_{10}^q = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (+54) \cdot 6 \right] = -\frac{108}{EI}$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (-12 - 0)}{0.60} dx = -\alpha \cdot 20 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \int M_1 d\theta_0^T = -\alpha \cdot 20 \cdot \int_0^6 M_1 dx = -\alpha \cdot 20 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 6 \right]$$

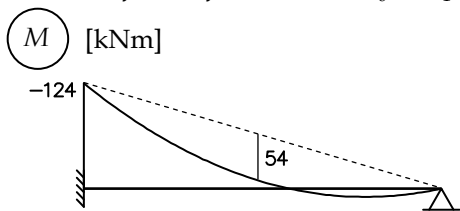
$$\delta_{10}^\rho = -V_{B1} \cdot \rho_{B0} = -\left[(-1/6) \cdot (-0.012) \right]$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^\rho + \delta_{10}^T = -248 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 6 \right] = +\frac{2}{EI}$$

$$X_1 = -\delta_{10} / \delta_{11} = -(-248 \times 10^{-5}) / (2 \times 10^{-5}) = +124 \text{ kNm}$$

Momentos fletores finais : $M = M_0 + M_1 \cdot X_1$



Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^\rho + \delta_{10}^T$$

$$\delta_{10}^q = \int_{\text{viga}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} M_1 d\theta_0^T + \int_{\text{viga}} N_1 du_0^T, \text{ sendo } N_1 = 0$$

$$1 \cdot \delta_{10}^\rho + V_{B1} \cdot \rho_{B0} = 0 \Rightarrow \delta_{10}^\rho = -V_{B1} \cdot \rho_{B0}$$

$$\delta_{10}^q = -108 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{10}^T = +60 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{10}^\rho = -200 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = +2 \times 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$