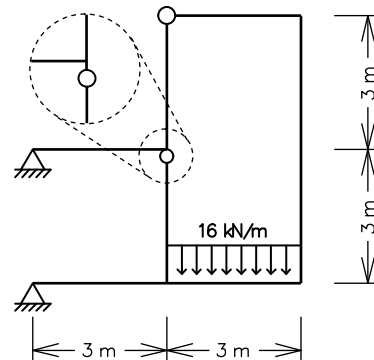


ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2014

Primeira Prova - Data: 15/09/2014 - Duração: 2:45 hs - Sem Consulta

1ª Questão (5,5 pontos)

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$.

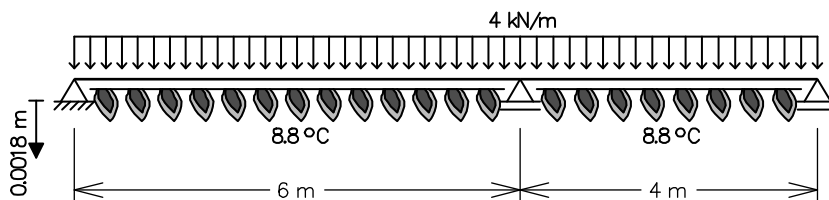


2ª Questão (3,5 pontos)

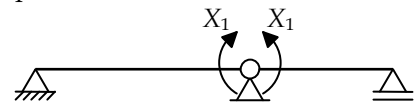
Para a viga contínua com dois vãos mostrada abaixo pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. A viga tem um material com módulo de elasticidade $E = 10^8 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. A viga tem uma seção transversal com área $A = 0.01 \text{ m}^2$, momento de inércia $I = 0.001 \text{ m}^4$, altura $h = 0.60 \text{ m}$ e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam na viga concomitantemente:

- Carga uniformemente distribuída de 4 kN/m ao longo de toda a extensão da viga.
- Aquecimento das fibras inferiores da viga de $\Delta T_i = +8.8 ^\circ\text{C}$ ao longo de toda a sua extensão (as fibras superiores não sofrem variação de temperatura, isto é, $\Delta T_s = 0 ^\circ\text{C}$).
- Recalque vertical (para baixo) de 1.8 mm (0.0018 m) do apoio esquerdo.

Considere que a viga pode se deformar axialmente, isto é, não despreze a energia de deformação axial.



Adote o seguinte Sistema Principal e Hiperestático:



Sabe-se:

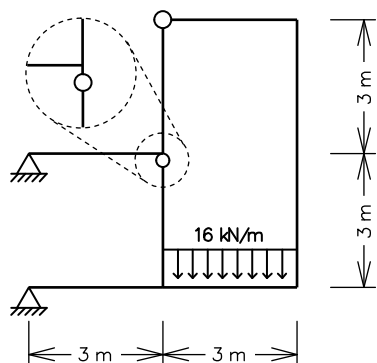
- (i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
- $$du^T = \alpha \Delta T_{CG} dx$$
- sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.
- (ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
- $$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$
- sendo ΔT_i a variação de temperatura das fibras inferiores da viga e ΔT_s a variação de temperatura das fibras superiores.

3ª Questão (1,0 ponto) - Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

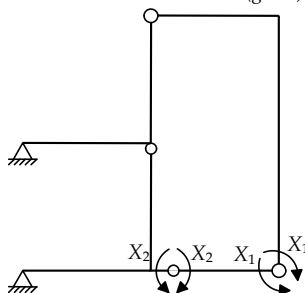
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

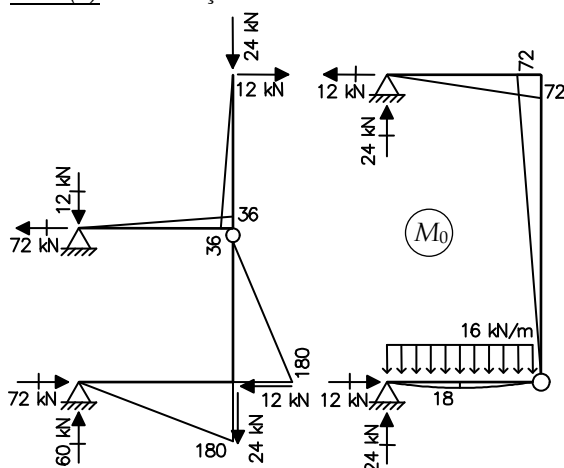
1ª Questão



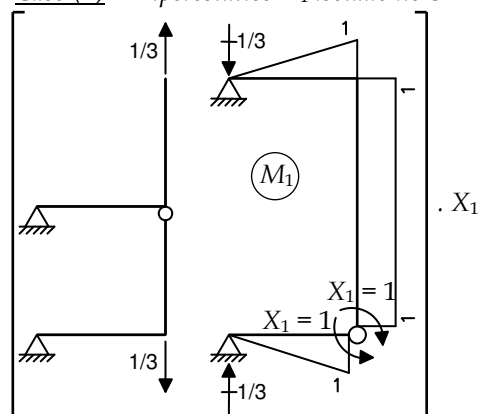
Sistema Principal e Hiperestáticos
($g = 2$)



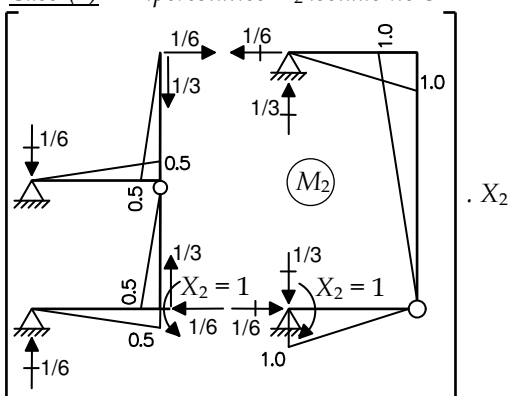
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +14.6 \text{ kNm} \\ X_2 = -43.8 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 18 \cdot 3 \right] = -\frac{270}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\begin{aligned} &+\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 36 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 36 \cdot 3 \\ &+\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 180 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 180 \cdot 3 \\ &+\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 18 \cdot 3 \end{aligned} \right] = + \frac{270}{EI}$$

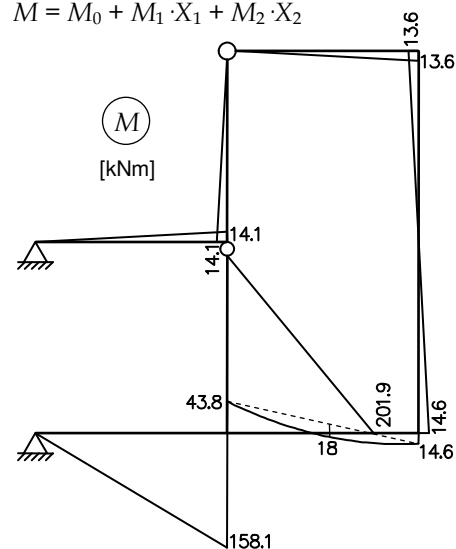
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right] = + \frac{8}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \right] = -\frac{7}{2EI}$$

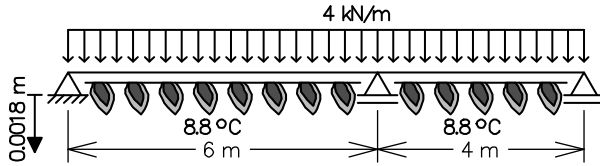
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right] = + \frac{5}{EI}$$

Momentos Fletores Finais

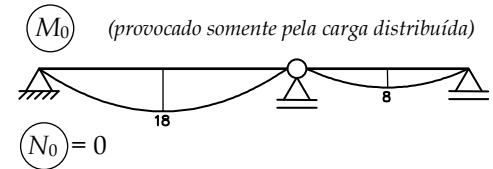
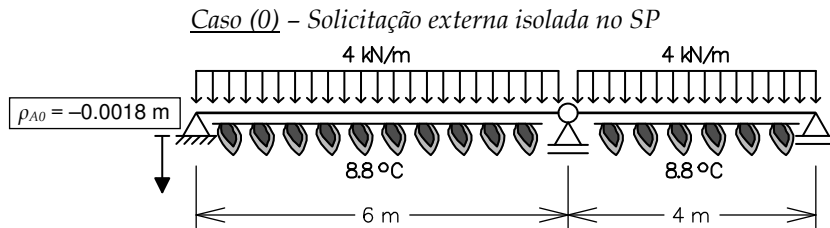
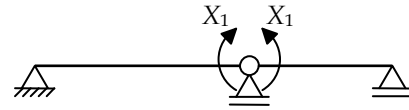
$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$



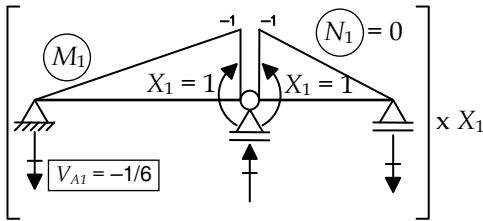
2ª Questão



Sistema Principal e Hiperestático:



Caso (1) - X1 isolado no SP



Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

δ_{10} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula do Sistema Principal provocada pela carga uniformemente distribuída, pela variação de temperatura e pelo recalque de apoio, atuando concomitantemente no caso (0):

$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T + \delta_{10}^p$$

δ_{11} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula do Sistema Principal provocada por $X_1 = 1$ no caso (1):

$$\delta_{10}^q = \int_{\text{viga}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_{\text{viga}} \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

$$\delta_{10}^q = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (+18) \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (+8) \cdot 4 \right] + \frac{1}{EA} [0]$$

$$I = 0.001 \text{ m}^4 \quad A = 0.01 \text{ m}^2 \quad E = 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$\delta_{10}^q = -\frac{140}{3} \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{11} = \int_{\text{viga}} \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \int_{\text{viga}} \frac{(N_1)^2}{EA} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 4 \right] + \frac{1}{EA} [0]$$

$$\delta_{11} = +\frac{10}{3} \cdot 10^{-5} \text{ rad/kNm}$$

$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} M_1 d\theta_0^T + \int_{\text{viga}} N_1 du_0^T$$

$$h = 0.60 \text{ m}$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (+8.8)}{0.60} dx = +\alpha \cdot \frac{44}{3} \cdot dx$$

$$du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = +\alpha \cdot 4.4 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = +\alpha \cdot \frac{44}{3} \cdot \int_{\text{viga}} M_1 dx + \alpha \cdot 4.4 \cdot \int_{\text{viga}} N_1 dx$$

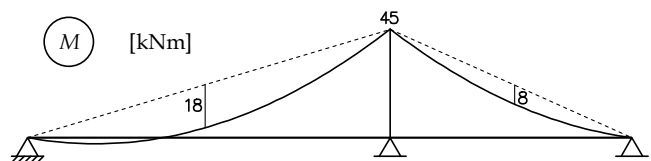
$$\delta_{10}^T = +\alpha \cdot \frac{44}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 4 \right] + \alpha \cdot 4.4 \cdot [0]$$

$$\delta_{10}^T = -\frac{220}{3} \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = +45 \text{ kNm}$$

Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



$$1 \cdot \delta_{10}^p + V_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \Rightarrow \delta_{10}^p = -V_{A1} \cdot \rho_{A0}$$

$$\delta_{10}^p = -V_{A1} \cdot \rho_{A0} = -\left[(-1/6) \cdot (-0.0018)\right] = -30 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T + \delta_{10}^p = -150 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$