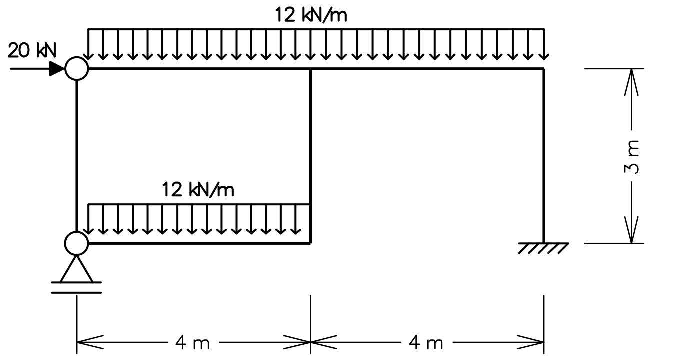
ENG 1204 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS II – 2º Semestre – 2015

Primeira Prova – Data: 16/09/2015 – Duração: 2:30 hs – Sem Consulta

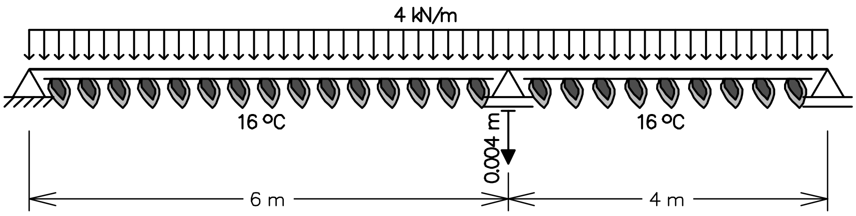
1ª Questão (5,5 pontos)
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 7.2\text{x}10^4$ kNm².



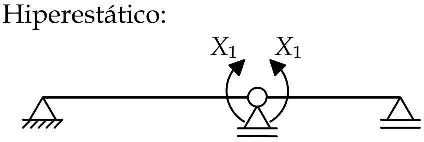
2ª Questão (3,5 pontos)
A viga contínua com dois vãos mostrada abaixo tem um material com módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN/m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. A viga tem uma seção transversal com área $A = 0.01$ m², momento de inércia $I = 0.001$ m⁴, altura $h = 0.60$ m e centro de gravidade no meio de altura. As seguintes solicitações atuam na viga <u>concomitantemente</u>:

- Carga uniformemente distribuída de 4 kN/m ao longo de toda a extensão da viga.
- Aquecimento das fibras inferiores da viga de $\Delta T_i = +16$ °C ao longo de toda a sua extensão (as fibras superiores não sofrem variação de temperatura, isto é, $\Delta T_s = 0$ °C).
- Recalque vertical (para baixo) de 4 mm (0.004 m) do apoio central.

Pede-se:
(a) Diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças (3,0 pontos).
(b) Forneça a interpretação física do termo de carga δ_{10}, indicando causa, localização, se é deslocamento ou rotação, e se é absoluto ou relativo (0,5 ponto).



Adote o seguinte Sistema Principal e Hiperestático:



Sabe-se:

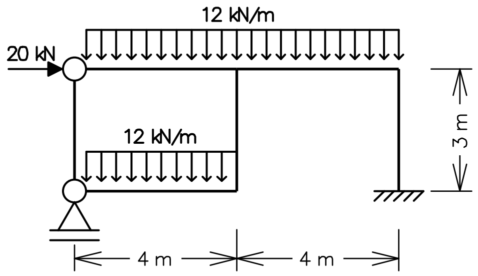
(i) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$du^T = \alpha \, \Delta T_{CG} \, dx$
sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

(ii) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é
$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$
sendo ΔT_i a variação de temperatura das fibras inferiores da viga e ΔT_s a variação de temperatura das fibras superiores.

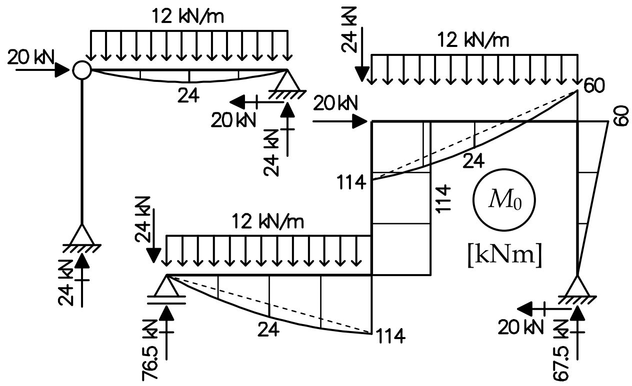
3ª Questão (1,0 ponto) – Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:
$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \dfrac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

1ª Questão

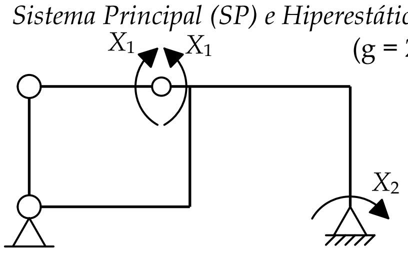


Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP

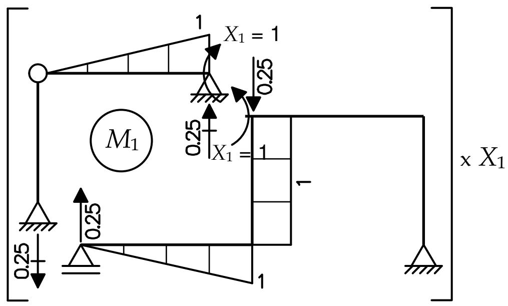


Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos

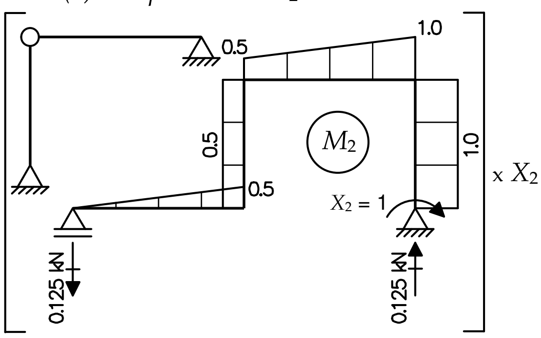
(g = 2)



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases}\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix}+494 \\ -273\end{Bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix}+17/3 & -13/6 \\ -13/6 & +77/12\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1 \\ X_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}X_1 = -81.4 \text{ kNm} \\ X_2 = +15.1 \text{ kN}\end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 24\cdot 4 + 1\cdot 114\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 114\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 24\cdot 4\right] = +\frac{494}{EI}$$

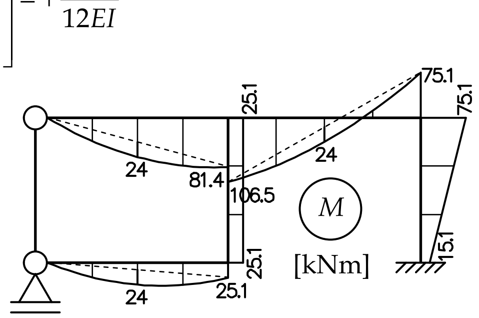
$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\begin{matrix}-\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 114\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 0.5\cdot 60\cdot 4 - \frac{1}{6}\cdot 1.0\cdot 114\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1.0\cdot 60\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 24\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 1.0\cdot 24\cdot 4 \\ -0.5\cdot 114\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1.0\cdot 60\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 114\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 24\cdot 4\end{matrix}\right] = -\frac{273}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\right) + 1\cdot 1\cdot 3\right] = +\frac{17}{3EI} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\cdot\left[-0.5\cdot 1\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 1\cdot 4\right] = -\frac{13}{6EI}$$

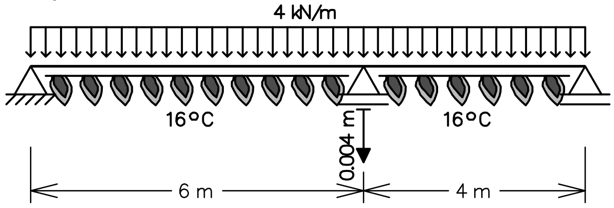
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\begin{matrix}+\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 0.5\cdot 1.0\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 1.0\cdot 0.5\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1.0\cdot 1.0\cdot 4 \\ +0.5\cdot 0.5\cdot 3 + 1.0\cdot 1.0\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 4\end{matrix}\right] = +\frac{77}{12EI}$$

Momentos Fletores Finais:

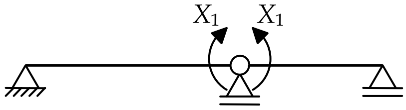
$$M = M_0 + M_1\cdot X_1 + M_2\cdot X_2$$



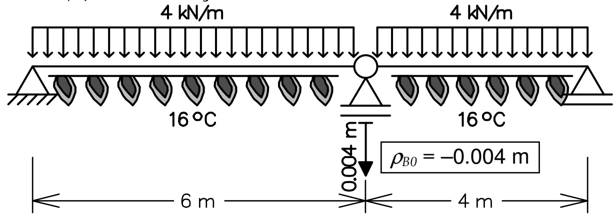
2ª Questão



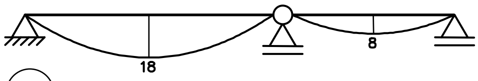
Sistema Principal e Hiperestático:



Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP

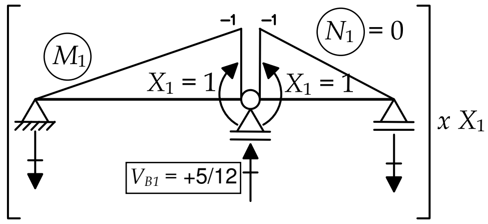


M_0 *(provocado somente pela carga distribuída)*



$N_0 = 0$

Caso (1) – X_1 isolado no SP



<u>*Equação de compatibilidade*</u>

$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$

δ_{10} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula do Sistema Principal provocada pela carga uniformemente distribuída, pela variação de temperatura e pelo recalque de apoio, atuando concomitantemente no *caso (0)*:

$\delta_{10} = \delta_{10}^{q} + \delta_{10}^{T} + \delta_{10}^{\rho}$

δ_{11} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula do Sistema Principal provocada por $X_1 = 1$ no *caso (1)*:

$$\delta_{10}^{q} = \int_{viga} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_{viga} \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

$$\delta_{10}^{q} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot(+18)\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot(+8)\cdot 4\right] + \frac{1}{EA}[0]$$

$I = 0.001$ m⁴ $\quad A = 0.01$ m² $\quad E = 10^8$ kN/m²

$$\delta_{10}^{q} = -\frac{140}{3}\cdot 10^{-5}\,\text{rad}$$

$$\delta_{10}^{T} = \int_{viga} M_1 d\theta_0^T + \int_{viga} N_1 du_0^T$$

$h = 0.60$ m

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha\cdot(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha\cdot(+16)}{0.60} dx = +\alpha\cdot\frac{80}{3}\cdot dx$$

$$du_0^T = \alpha\cdot\Delta T_{GC}\cdot dx = +\alpha\cdot 8\cdot dx$$

$$\delta_{10}^{T} = +\alpha\cdot\frac{80}{3}\cdot\int_{viga} M_1 dx + \alpha\cdot 8\cdot\int_{viga} N_1 dx$$

$$\delta_{10}^{T} = +\alpha\cdot\frac{80}{3}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 4\right] + \alpha\cdot 8\cdot[0]$$

$$\delta_{10}^{T} = -\frac{400}{3}\cdot 10^{-5}\ \text{rad}$$

$$1\cdot\delta_{10}^{\rho} + V_{B1}\cdot\rho_{B0} = 0 \;\Rightarrow\; \delta_{10}^{\rho} = -V_{B1}\cdot\rho_{B0}$$

$$\delta_{10}^{\rho} = -\left[(+5/12)\cdot(-0.004)\right] = +\frac{500}{3}\cdot 10^{-5}\ \text{rad}$$

$$\boxed{\delta_{10} = \delta_{10}^{q} + \delta_{10}^{T} + \delta_{10}^{\rho} = -\frac{40}{3}\cdot 10^{-5}\ \text{rad}}$$

$$\delta_{11} = \int_{viga} \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \int_{viga} \frac{(N_1)^2}{EA} dx$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 4\right] + \frac{1}{EA}\cdot[0]$$

$$\boxed{\delta_{11} = +\frac{10}{3}\cdot 10^{-5}\,\text{rad/kNm}}$$

$$\boxed{\delta_{10} + \delta_{11}\cdot X_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad X_1 = +4\ \text{kNm}}$$

<u>*Momentos fletores finais*</u>

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$

M [kNm]