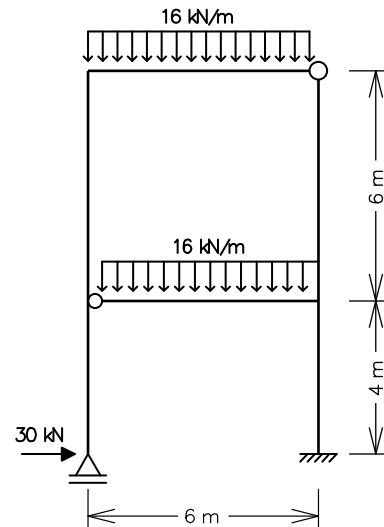


ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2016

Primeira Prova - Datas: 03/10/2016 - 05/10/2016 - Sem Consulta

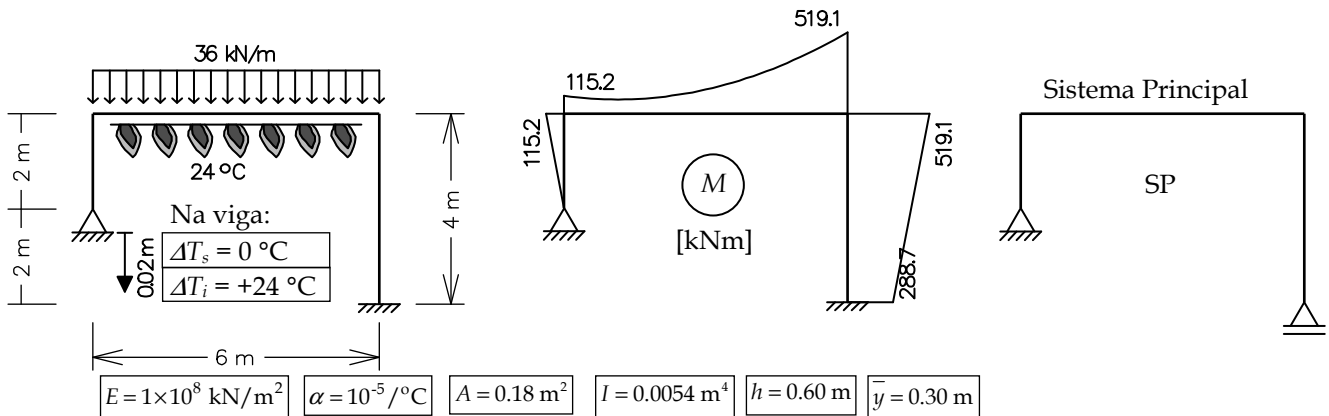
1ª Questão (5,5 pontos)

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 3.6 \times 10^5 \text{ kNm}^2$.



2ª Questão (3,5 pontos)

Considere o pórtico hiperestático mostrado abaixo. O diagrama final de momentos fletores também é indicado. O material tem módulo de elasticidade $E = 1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. As barras do pórtico têm uma seção transversal com área $A = 0.18 \text{ m}^2$, momento de inércia $I = 0.0054 \text{ m}^4$, altura $h = 0.60 \text{ m}$ e centro de gravidade no meio de altura.



As seguintes solicitações atuam no pórtico concomitantemente:

- Carregamento com força uniformemente distribuída $q = 36 \text{ kN/m}$ atuando na viga do pórtico.
- Aquecimento de $\Delta T_i = +24 ^\circ\text{C}$ na face inferior da viga.
- Recalque vertical, para baixo, de 2.0 cm ($\rho = -0.02 \text{ m}$) do apoio da esquerda.

Considerando que na solução do pórtico pelo Método das Forças foi adotado o Sistema Principal (SP) indicado acima, pede-se:

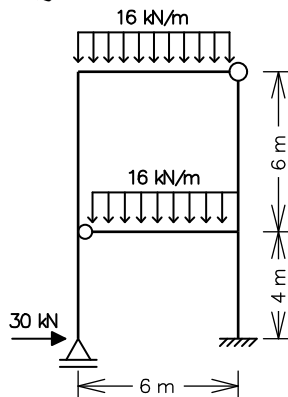
- Mostre uma figura do SP com os hiperestáticos indicados, arbitrando um sentido para eles (0,5 ponto).
- Baseado no diagrama final de momentos fletores, determine os valores dos hiperestáticos, com unidades. Os sinais devem ser consistentes com os sentidos dos hiperestáticos arbitrados no item (a) (0,5 ponto).
- Forneça a interpretação física dos termos de carga δ_{i0} , indicando causa, localização, se é deslocamento ou rotação, e se é absoluto ou relativo (0,5 ponto).
- Determine o diagrama de momentos fletores do caso (0) da solução provocado pelas três solicitações concomitantes (0,5 ponto).
- Calcule o valor do termo de carga δ_{i0} , indicando a unidade, considerando deformações axiais e de flexão (1,5 pontos).

3ª Questão (1,0 ponto) - Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

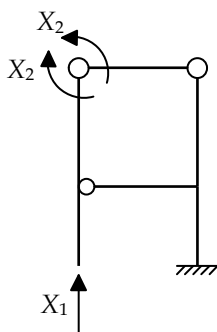
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

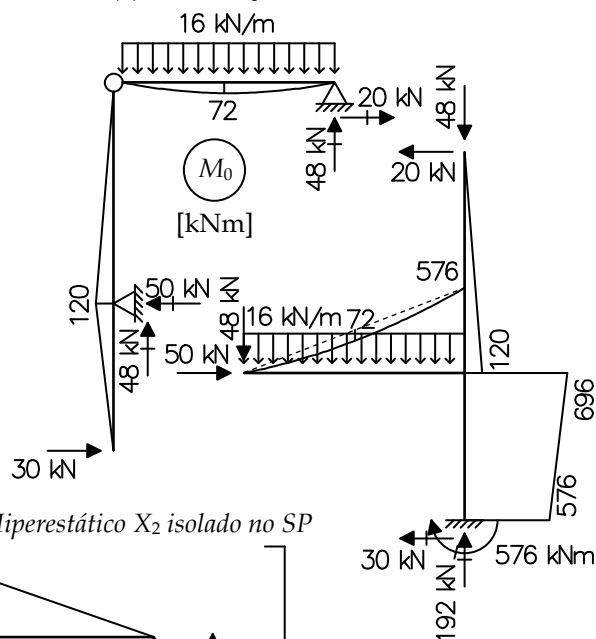
1ª Questão



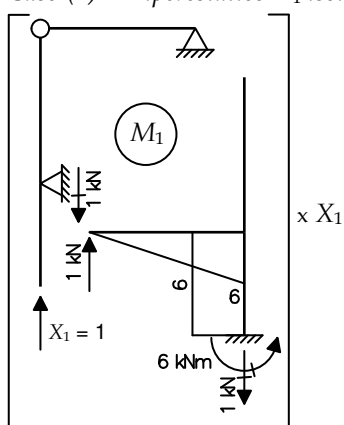
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos ($g = 2$)



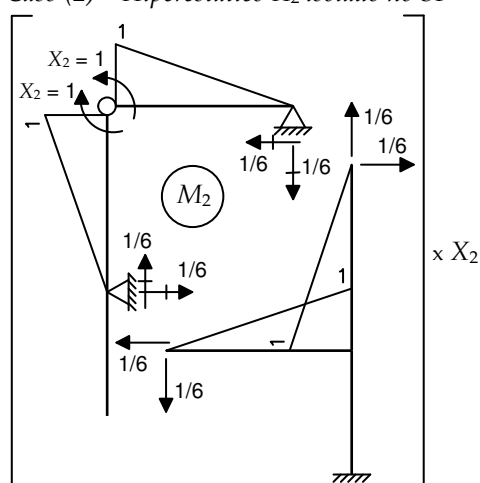
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -21312 \\ +744 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} +216 & -12 \\ -12 & +8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = +102 \text{ kN} \\ X_2 = +60 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 576 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 72 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 696 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 576 \cdot 4 \right] = -\frac{21312}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 120 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 120 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 576 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 72 \cdot 6 \right] = + \frac{744}{EI}$$

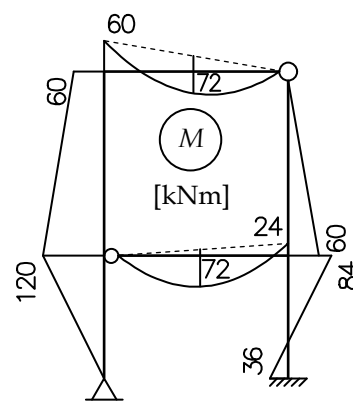
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 4 \right] = +\frac{216}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \right] = -\frac{12}{EI}$$

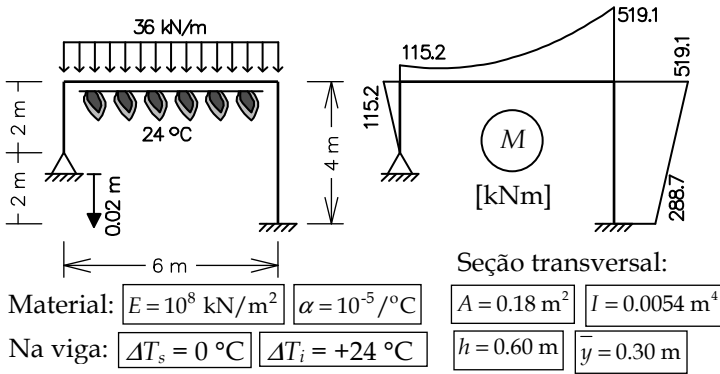
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) \right] = +\frac{8}{EI}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$

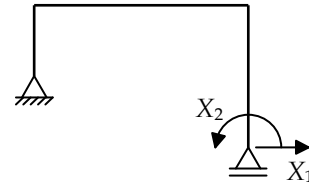


2ª Questão (1ª opção para numeração dos hiperestáticos)



Item (a)

Sistema Principal e Hiperestáticos ($g = 2$)



Item (b)

$$X_1 \cdot 4 - 288.7 = -519.1 \Rightarrow X_1 = -57.6 \text{ kN}$$

$$X_2 = -288.7 \text{ kNm}$$

Item (c)

O termo de carga δ_{10} é o deslocamento horizontal absoluto do apoio da direita do Sistema Principal (na direção de X_1) provocado pela força uniformemente distribuída aplicada na viga, pela variação de temperatura na viga e pelo recalque vertical no apoio da esquerda, no caso (0).

O termo de carga δ_{20} é a rotação absoluta da seção do apoio da direita do Sistema Principal (associada a X_2) provocada pela força uniformemente distribuída aplicada na viga, pela variação de temperatura na viga e pelo recalque vertical no apoio da esquerda, no caso (0).

Item (d)

Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP

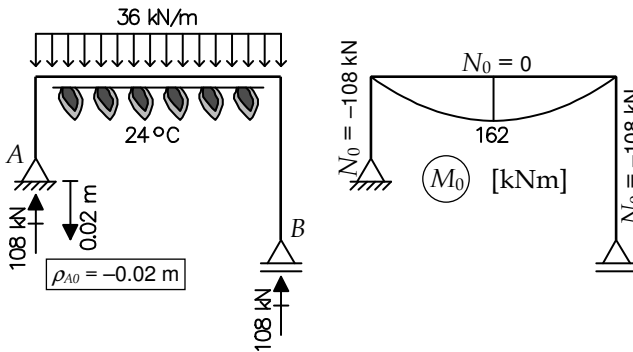


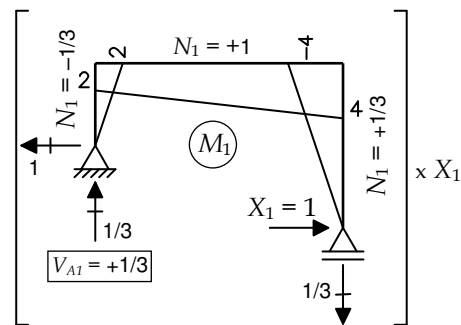
Diagrama de momentos fletores do caso (0) só depende da força uniformemente distribuída aplicada na viga, pois variação de temperatura e recalque de apoio não provocam esforços internos no SP isostático.

Item (e)

Equações de compatibilidade

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Item (e) (cont.)

$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T + \delta_{10}^p$$

$$\delta_{10}^q = \int_{\text{pórtico}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_{\text{viga}} \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} M_1 d\theta_0^T + \int_{\text{viga}} N_1 du_0^T$$

$$1 \cdot \delta_{10}^p + V_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \Rightarrow \delta_{10}^p = -V_{A1} \cdot \rho_{A0}$$

$$\delta_{10}^p = -V_{A1} \cdot \rho_{A0} = -\left[(+1/3) \cdot (-0.02) \right]$$

$$\delta_{10}^p = +6.667 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{10}^q = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 162 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 162 \cdot 6 \right] +$$

$$\frac{1}{EA} \left[\left(-\frac{1}{3} \right) \cdot (-108) \cdot 2 + \left(+\frac{1}{3} \right) \cdot (-108) \cdot 4 \right]$$

$$\delta_{10}^q = +3.596 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (+24 - 0)}{0.60} dx = +\alpha \cdot 40 \cdot dx$$

$$du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{CG} \cdot dx = +\alpha \cdot 12 \cdot dx$$

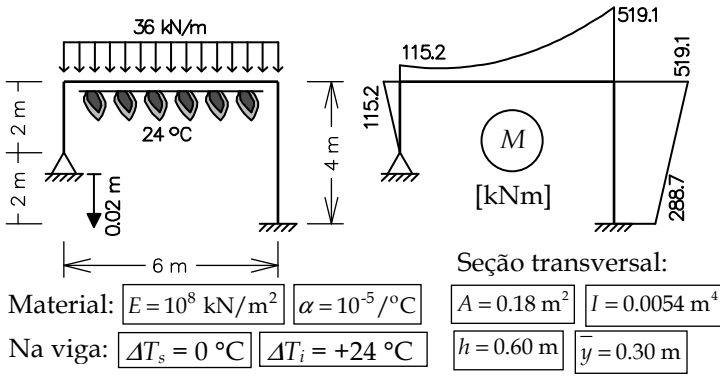
$$\delta_{10}^T = \int_0^6 M_1 d\theta_0^T + \int_0^6 N_1 du_0^T = +\alpha \cdot 40 \cdot \int_0^6 M_1 dx + \alpha \cdot 12 \cdot \int_0^6 N_1 dx$$

$$= +\alpha \cdot 40 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (+2) \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot (+4) \cdot 6 \right] + \alpha \cdot 12 \cdot [(+1) \cdot 6]$$

$$\delta_{10}^T = +7.920 \times 10^{-3} \text{ m}$$

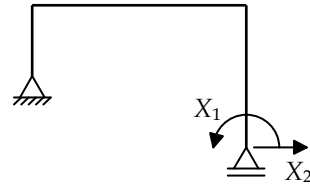
$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T + \delta_{10}^p = +18.183 \times 10^{-3} \text{ m}$$

2ª Questão (2ª opção para numeração dos hiperestáticos)



Item (a)

Sistema Principal e Hiperestáticos ($g = 2$)



Item (b)

$$X_1 = -288.7 \text{ kNm}$$

$$X_2 \cdot 4 - 288.7 = -519.1 \Rightarrow X_2 = -57.6 \text{ kN}$$

Item (c)

O termo de carga δ_{10} é a rotação absoluta da seção do apoio da direita do Sistema Principal (associada a X_1) provocada pela força uniformemente distribuída aplicada na viga, pela variação de temperatura na viga e pelo recalque vertical no apoio da esquerda, no caso (0).

O termo de carga δ_{20} é o deslocamento horizontal absoluto do apoio da direita do Sistema Principal (na direção de X_2) provocado pela força uniformemente distribuída aplicada na viga, pela variação de temperatura na viga e pelo recalque vertical no apoio da esquerda, no caso (0).

Item (d)

Caso (0) – Solicitações externas isoladas no SP

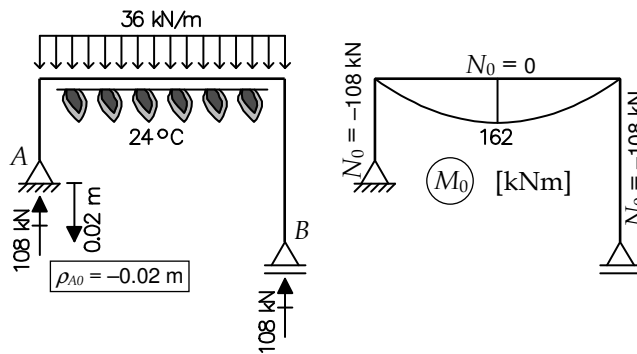


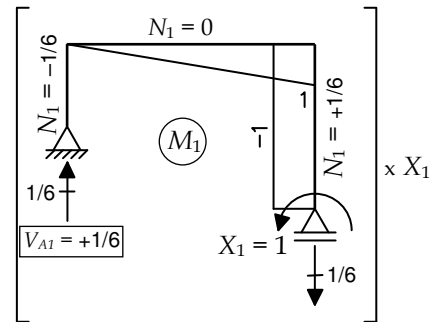
Diagrama de momentos fletores do caso (0) só depende da força uniformemente distribuída aplicada na viga, pois variação de temperatura e recalque de apoio não provocam esforços internos no SP isostático.

Item (e)

Equações de compatibilidade

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Item (e) (cont.)

$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T + \delta_{10}^p$$

$$\delta_{10}^q = \int_{\text{pórtico}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int_{\text{viga}} \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} M_1 d\theta_0^T + \int_{\text{viga}} N_1 du_0^T$$

$$1 \cdot \delta_{10}^p + V_{A1} \cdot \rho_{A0} = 0 \Rightarrow \delta_{10}^p = -V_{A1} \cdot \rho_{A0}$$

$$\delta_{10}^p = -V_{A1} \cdot \rho_{A0} = -\left[(+1/6) \cdot (-0.02) \right]$$

$$\delta_{10}^p = +3.333 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\delta_{10}^q = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 162 \cdot 6 \right] + \frac{1}{EA} \left[\left(-\frac{1}{6} \right) \cdot (-108) \cdot 2 + \left(+\frac{1}{6} \right) \cdot (-108) \cdot 4 \right]$$

$$\delta_{10}^q = +0.598 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$d\theta_0^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (+24 - 0)}{0.60} dx = +\alpha \cdot 40 \cdot dx$$

$$du_0^T = \alpha \cdot \Delta T_{CG} \cdot dx = +\alpha \cdot 12 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \int_0^6 M_1 d\theta_0^T + \int_0^6 N_1 du_0^T = +\alpha \cdot 40 \cdot \int_0^6 M_1 dx + \alpha \cdot 12 \cdot \int_0^6 N_1 dx$$

$$= +\alpha \cdot 40 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (+1) \cdot 6 \right] + \alpha \cdot 12 \cdot [(0) \cdot 6]$$

$$\delta_{10}^T = +1.200 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T + \delta_{10}^p = +5.131 \times 10^{-3} \text{ rad}$$