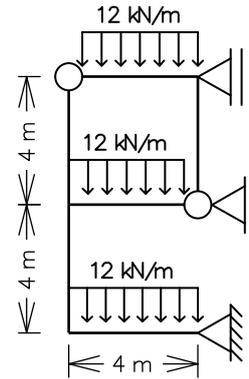


# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 1º Semestre - 2016

## Primeira Prova - Data: 06/04/2016 - Duração: 2:30 hs - Sem Consulta

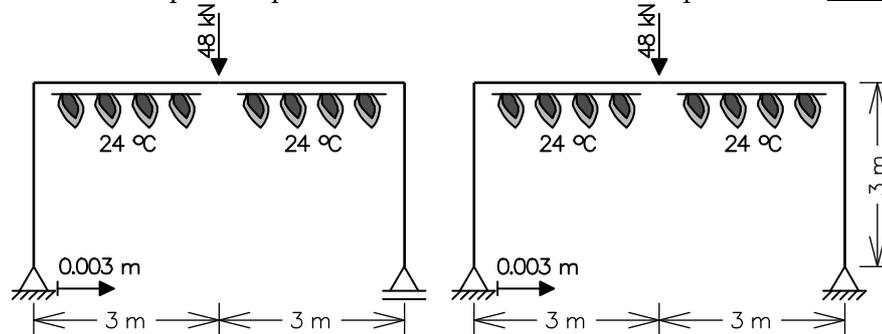
### 1ª Questão (5,5 pontos)

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão  $EI = 3.6 \times 10^5 \text{ kNm}^2$ .



### 2ª Questão (3,5 pontos)

Considere os pórticos planos mostrados abaixo sobre os quais atuam concomitantemente as seguintes solicitações:



- Uma carga concentrada vertical de 48 kN no centro viga (barra horizontal).
- Aquecimento das fibras inferiores da viga de  $\Delta T_i = +24 \text{ °C}$  ao longo de toda a sua extensão (as fibras superiores não sofrem variação de temperatura, isto é,  $\Delta T_s = 0 \text{ °C}$ ).
- Recalque horizontal (para a direita) de 3 mm ( $3 \times 10^{-3} \text{ m}$ ) do apoio esquerdo.

Sabe-se:

- (1) O material tem módulo de elasticidade  $E = 10^8 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha = 10^{-5} / \text{°C}$ .
- (2) As barras da estrutura têm seção transversal com área  $A = 1.2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$  e momento de inércia  $I = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ . A altura da seção transversal é  $h = 0,60 \text{ m}$  e o seu centro de gravidade fica posicionado na metade da altura.
- (3) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é  $du^T = \alpha \Delta T_{CG} dx$ , sendo  $\Delta T_{CG}$  a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.
- (4) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é  $d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$ .

Pede-se:

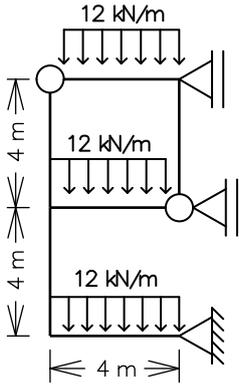
- (0,5 ponto) Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura isostática da esquerda para as três solicitações concomitantes.
- (2,5 pontos) Utilizando o Método das Forças, determine o diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática da direita para as três solicitações concomitantes. Utilize obrigatoriamente como Sistema Principal o pórtico isostático mostrado na figura da esquerda. Considere deformações axiais e por flexão.
- (0,5 ponto) Considere que a viga (barra horizontal) da estrutura teve a seção transversal modificada para uma com momento de inércia  $I = 2,0 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  (as outras barras não se alteram). Responda (não precisa fazer nenhum cálculo):
  - (c.1) O diagrama de momentos fletores da estrutura isostática se altera? Por que?
  - (c.2) O diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática se altera? Por que?

### 3ª Questão (1,0 ponto) - Grau vindo do primeiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

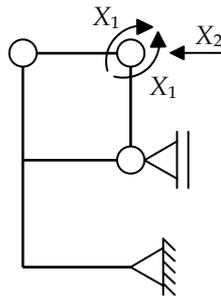
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

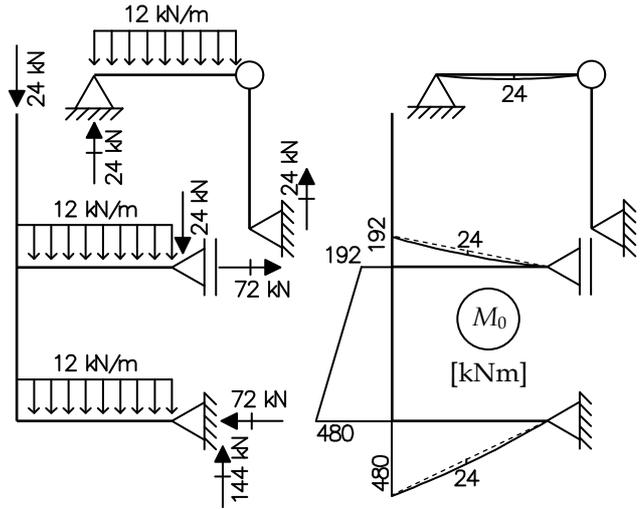
1ª Questão



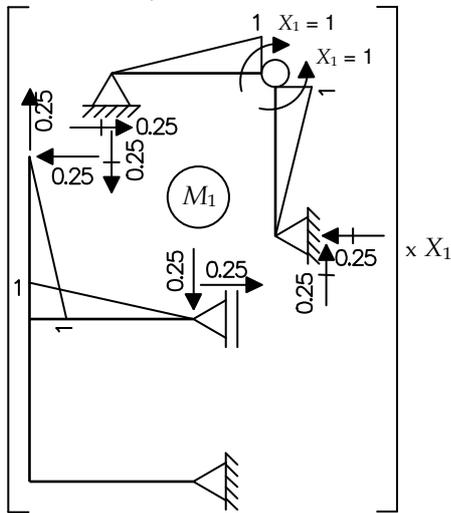
Sistema Principal (SP) e Hiperestáticos (g = 2)



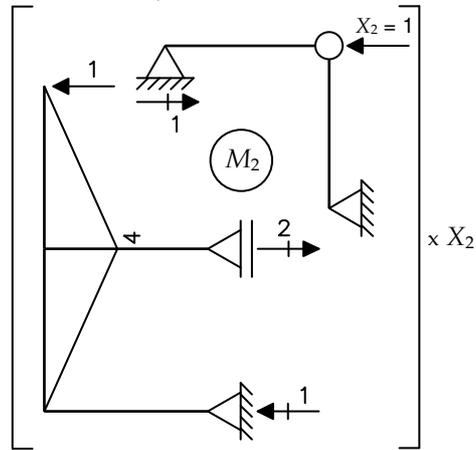
Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) - Hiperestático X1 isolado no SP



Caso (2) - Hiperestático X2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} +192 \\ -2304 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3EI} \begin{bmatrix} +16 & +16 \\ +16 & +128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -102.9 \text{ kNm} \\ X_2 = +66.9 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 24 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 192 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 24 \cdot 4 \right] = +\frac{192}{EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ -\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 192 \cdot 4 - \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 480 \cdot 4 \right] = -\frac{2304}{EI}$$

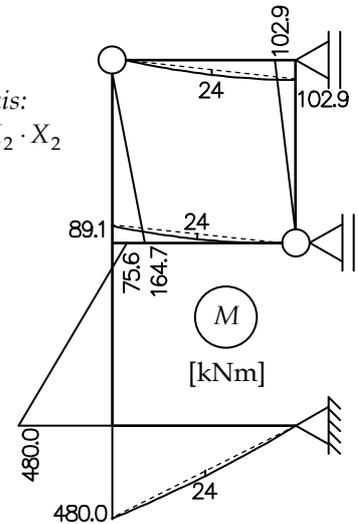
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +4 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right) \right] = +\frac{16}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 \right] = +\frac{16}{3EI}$$

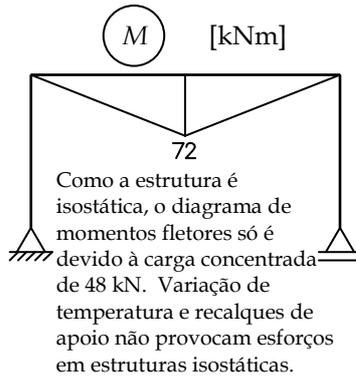
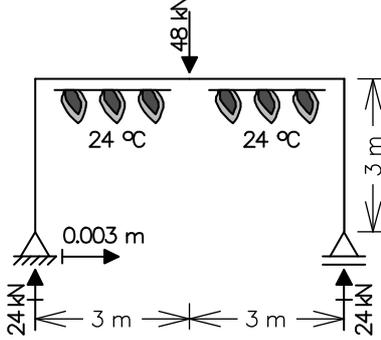
$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \right) \right] = +\frac{128}{3EI}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$

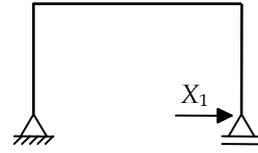


2ª Questão - Item (a)

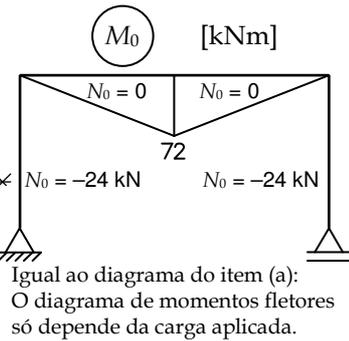
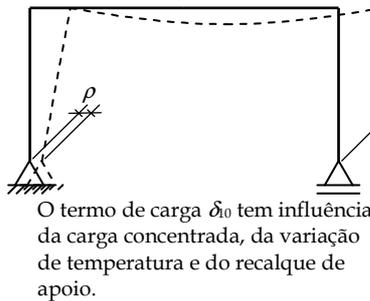
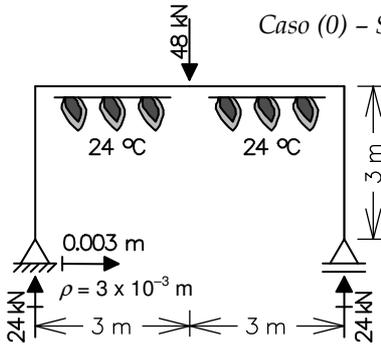


2ª Questão - Item (b)

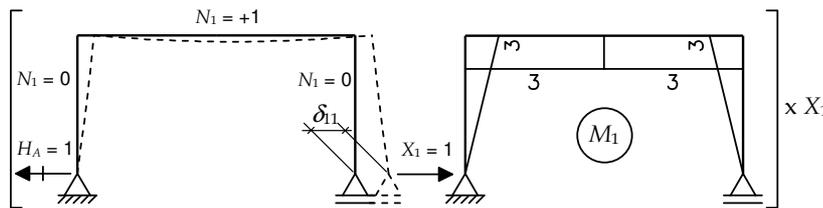
Sistema Principal e Hiperestático (g=1)



Caso (0) - Solicitações externas isoladas no SP



Caso (1) - X1 isolado no SP



$$\delta_{11} = \int \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \int \frac{(N_1)^2}{EA} dx$$

(considerando deformação por flexão e axial)

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \right) + 3 \cdot 3 \cdot 6 \right] + \frac{1}{EA} \cdot [ +1 \cdot 1 \cdot 6 ]$$

$$\delta_{11} = +72 \cdot 10^{-5} \text{ m/kN} + 5 \cdot 10^{-6} \text{ m/kN}$$

$$\delta_{11} = +72.5 \cdot 10^{-5} \text{ m/kN}$$

Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

Sendo  $\delta_{10} = \delta_{10}^P + \delta_{10}^T + \delta_{10}^\rho$ :

$\delta_{10}^P$  → deslocamento horizontal da seção do apoio da direita devido à carga concentrada no caso (0).

$\delta_{10}^T$  → deslocamento horizontal da seção do apoio da direita devido à variação de temperatura no caso (0).

$\delta_{10}^\rho$  → deslocamento horizontal da seção do apoio da direita devido ao recalque de apoio no caso (0).

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \rightarrow$$

$$(648 + 792 + 300) \cdot 10^{-5} + 72.5 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = 0$$

$$1740 \cdot 10^{-5} + 72.5 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -24 \text{ kN}$$

$$\delta_{10}^P = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int \frac{N_1 N_0}{EA} dx$$

$$\delta_{10}^P = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 72 \cdot 3 \right) \right] + \frac{1}{EA} [0] = +648 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\delta_{10}^T = \int_{\text{viga}} M_1 d\theta^T + \int_{\text{viga}} N_1 du^T$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot (24)}{0.60} dx = \alpha \cdot 40 \cdot dx$$

$$du^T = \alpha \cdot \Delta T_{CC} \cdot dx = \alpha \cdot (+12) \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \alpha \cdot 40 \cdot \int_{\text{viga}} M_1 dx + \alpha \cdot 12 \cdot \int_{\text{viga}} N_1 dx$$

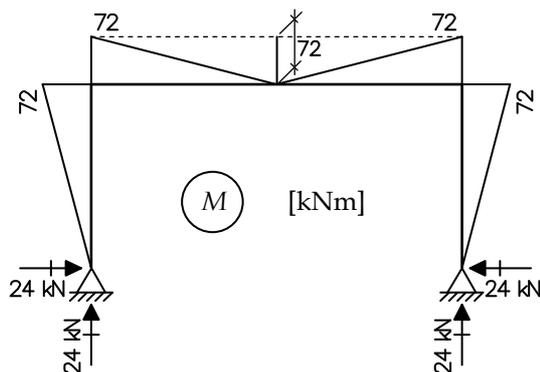
$$\delta_{10}^T = \alpha \cdot 40 \cdot 6 \cdot 3 + \alpha \cdot 12 \cdot 6 \cdot 1 = +792 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$1 \cdot \delta_{10}^P - H_A \cdot \rho = 0$$

$$\delta_{10}^P = +3 \cdot 10^{-3} = +300 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



## 2ª Questão - Item (c)

*Item (c.1)* - Na estrutura isostática, o diagrama de momentos fletores só depende dos valores da carga e reações, e da geometria da estrutura. Com a consideração da hipótese de pequenos deslocamentos, as equações de equilíbrio podem ser escritas para a geometria indeformada (original) da estrutura.

No caso da carga concentrada aplicada, a estrutura isostática terá sempre o diagrama de momentos fletores indicado no *item (a)* (diagrama triangular na viga). Momentos fletores devidos à variação de temperatura e ao recalque de apoio na estrutura isostática são sempre nulos.

Portanto, o diagrama de momentos fletores não se altera com a modificação do momento de inércia da seção transversal da viga.

*Item (c.2)* - Na estrutura hiperestática, por ter vínculos excedentes, os esforços internos dependem da rigidez relativa entre as barras. A solução da estrutura hiperestática pelo Método das Forças mostrada no *item (b)* demonstra que os valores dos momentos fletores finais dependem dos valores relativos entre momentos de inércia das seções transversais das barras. Por exemplo, o valor do coeficiente de flexibilidade  $\delta_{11} = +72.5 \cdot 10^{-5} \text{ m/kN}$  corresponde ao caso de todas as barras com mesma seção transversal. Esse valor seria diferente caso a viga tivesse uma seção transversal com o dobro do momento de inércia, alterando assim a resposta da estrutura.

Portanto, o diagrama de momentos fletores fica alterado com a modificação do momento de inércia da seção transversal da viga.