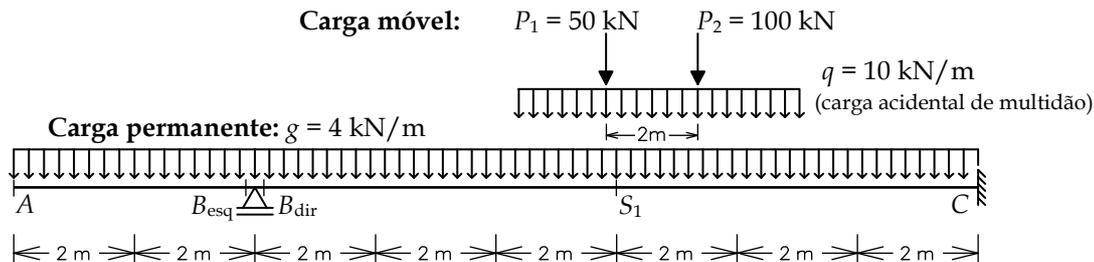


Nome: _____ Matrícula: _____

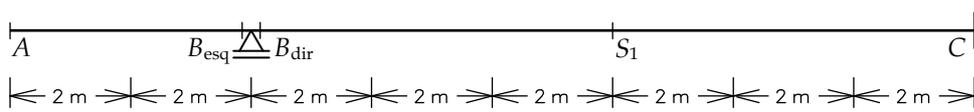
1ª Questão (4,0 pontos)

Você está envolvido no projeto de uma ponte rodoviária cujo sistema estrutural é a viga mostrada abaixo com um vão e um balanço. A carga permanente, constituída do peso próprio da estrutura, é uniformemente distribuída, tendo sido avaliada em $g = 4 \text{ kN/m}$. A carga móvel está indicada na figura, sendo que q representa a carga acidental de multidão e as cargas P_1 e P_2 representam as cargas dos eixos do veículo de projeto. A carga acidental de multidão não tem extensão definida, isto é, a sua área de atuação deve ser obtida de forma a majorar ou minorar um determinado efeito.



Pede-se:

- (a) Desenhe abaixo os aspectos das linhas de influência de esforços cortantes nas seções A, B_{esq} , B_{dir} , S_1 e C. Obs.: a tabela do item (b) pode auxiliar no traçado das linhas de influência (1,0 ponto).



			Posição da carga móvel para Q_A mínimo
$A_0 =$	$A_1 =$		LI Q_A
			Posição da carga móvel para Q_A máximo
			Posição da carga móvel para $Q_{B_{\text{esq}}}$ mínimo
$A_0 =$	$A_1 =$		LI $Q_{B_{\text{esq}}}$
			Posição da carga móvel para $Q_{B_{\text{esq}}}$ máximo
$A_0 = +1.0000$	$A_1 = +4.5002$		Posição da carga móvel para $Q_{B_{\text{dir}}}$ mínimo
			LI $Q_{B_{\text{dir}}}$
			Posição da carga móvel para $Q_{B_{\text{dir}}}$ máximo
			Posição da carga móvel para Q_{S_1} mínimo
$A_0 =$	$A_1 = -2.1562$	$A_2 = +0.6564$	LI Q_{S_1}
			Posição da carga móvel para Q_{S_1} máximo
			Posição da carga móvel para Q_C mínimo
$A_0 =$	$A_1 = -7.4998$		LI Q_C
			Posição da carga móvel para Q_C máximo

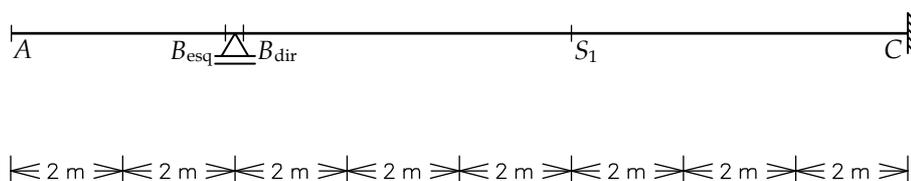
- (b) A tabela abaixo mostra valores das ordenadas das linhas de influência do item (a). Complete a tabela, determinando os valores que não são fornecidos. O ponto A é a origem do eixo x . Determine também os valores que não são fornecidos para as áreas positivas e negativas (A_0 , A_1 e A_2) das linhas de influência na figura da página anterior (1,0 ponto).

x	0 m	2 m	4 m	6 m	8 m	10 m	12 m	14 m	16 m
LI Q_A									
LI $Q_{B_{\text{esq}}}$									
LI $Q_{B_{\text{dir}}}$	0.5000	0.2500	0.0000 1.0000	0.7523	0.5185	0.3125	0.1481	0.0394	0.0000
LI Q_{S_1}			0.0000	-0.2477	-0.4815	-0.6875 0.3125	0.1481	0.0394	0.0000
LI Q_C			0.0000	-0.2477	-0.4815	-0.6875	-0.8519	-0.9606	-1.0000

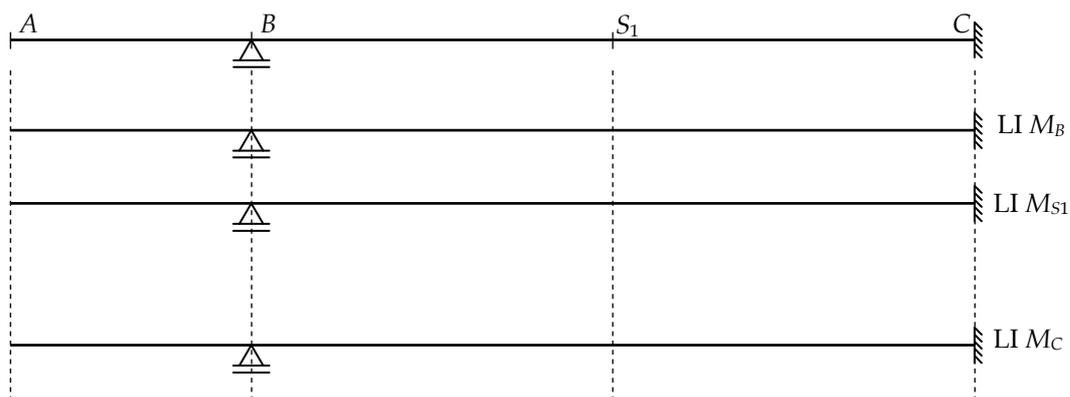
- (c) Com base nas linhas de influência do item (a) e na tabela do item (b) indique na figura da folha anterior as posições da carga móvel que provocam máximos e mínimos para esforço cortante nas seções indicadas (0,5 ponto).
- (d) Utilizando os resultados dos itens (a), (b) e (c), complete na tabela abaixo os valores dos esforços cortantes máximos e mínimos nas seções A , B_{esq} , B_{dir} , S_1 e C provocados pela carga permanente e pela carga móvel. Utilize a convenção de sinais usual para esforços cortantes. Desenhe as envoltórias de esforços cortantes máximos e mínimos baseadas nos valores obtidos (1,0 ponto).

Seção	Carga Permanente	Carga Móvel		Envoltórias	
		Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo
Q_A [kN]					
$Q_{B_{\text{esq}}}$ [kN]					
$Q_{B_{\text{dir}}}$ [kN]					
Q_{S_1} [kN]					
Q_C [kN]					

Envoltórias:
Esforços Cortantes [kN]

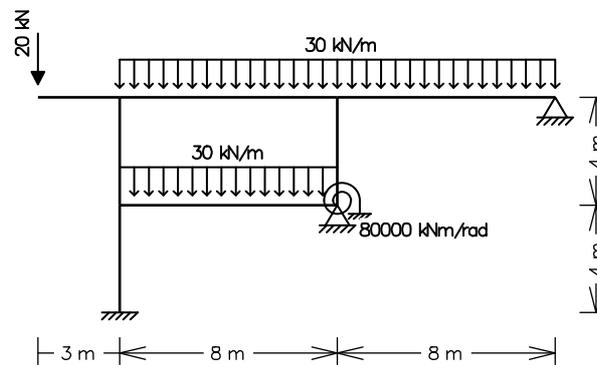


- (e) Desenhe abaixo os aspectos das linhas de influência de momentos fletores nas seções B , S_1 e C (0,5 ponto).



2ª Questão (2,0 pontos)

Empregando-se o Processo de Cross, obter o diagrama de momentos fletores (precisão de 1 kNm) para o quadro abaixo (barras inextensíveis). Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$. O nó central tem um apoio elástico rotacional com coeficiente de rigidez $K_\theta = 8 \times 10^4 \text{ kNm/rad}$. Utilize duas casas decimais para os coeficientes de distribuição de momentos.



3ª Questão (3,0 pontos)

Você está envolvido no projeto de uma estrutura, mas perdeu o desenho do modelo estrutural. Felizmente, você encontrou o arquivo de dados de entrada e saída para o programa de computador que foi utilizado para fazer a análise estrutural. Este arquivo está reproduzido na folha seguinte.

Os esforços internos nas extremidades das barras são fornecidos nos sistemas de eixos locais das barras com a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos: esforços normais são positivos no sentido do eixo local x e negativos no sentido contrário; esforços cortantes são positivos no sentido do eixo local y e negativos no sentido contrário; e momentos fletores são positivos quando têm o sentido anti-horário e negativos no sentido contrário.

Observe que os valores da rotação do nó 2 e dos esforços cortantes e momentos fletores da barra 1 não puderam ser recuperados do arquivo.

Pede-se:

- Calcule o valor da rotação do nó 2. A rotação é positiva se tiver o sentido anti-horário e negativa se tiver o sentido horário (0,5 ponto).
- Com base nos valores dos deslocamentos e rotações nodais fornecidos e nos coeficientes de rigidez locais da barra 1, determine os valores dos esforços internos que estão faltando para essa barra. Os valores desses esforços internos podem ser verificados com base em equilíbrio nodal. Entretanto, a resposta só será considerada correta se os esforços nessa barra forem calculados utilizando os deslocamentos e rotações nodais fornecidos e os coeficientes de rigidez locais da barra (1,5 pontos).
- Desenhe os diagramas de esforços normais, esforços cortantes e momentos fletores fornecidos pelo modelo estrutural. Esforços normais de tração são positivos e de compressão são negativos. Esforços cortantes são positivos quando, entrando com as forças à esquerda de uma seção transversal (de quem olha da fibra inferior para a fibra superior), a resultante das forças na direção transversal à barra for para cima. O diagrama de momentos fletores é sempre desenhado do lado da fibra tracionada (1,0 ponto).

Dados de Entrada e Resultados do Modelo Computacional

Coordenadas Nodais e Condições de Suporte

Nó	X (m)	Y (m)	Desl.X	Desl.Y	Rot.Z	Mola X (kN/m)	Mola Y (kN/m)	Mola Z (kNm/rad)
1	3.0	0.0	Fixo	Fixo	Fixo	0.0	0.0	0.0
2	11.0	4.0	Fixo	Fixo	Livre	0.0	0.0	80000.0
3	0.0	8.0	Livre	Livre	Livre	0.0	0.0	0.0
4	3.0	8.0	Livre	Livre	Livre	0.0	0.0	0.0
5	11.0	8.0	Livre	Livre	Livre	0.0	0.0	0.0

Dados das Barras

Barra	Nó inicial	Nó final	Rótula inicial	Rótula final	Mod.Elast. (kN/m ²)	Área Seção (m ²)	Mom.Inércia (m ⁴)
1	1	4	Sim	Não	2.0e+08	0.012	0.00012
2	2	5	Não	Não	2.0e+08	0.012	0.00012
3	3	4	Não	Não	2.0e+08	0.012	0.00012
4	5	4	Não	Não	2.0e+08	0.012	0.00012

Dados de Cargas Concentradas em Nós

Nó	Fx (kN)	Fy (kN)	Mz (kNm)
3	0.0	-20.0	0.0

Dados de Carregamentos Uniformemente Distribuídos em Barras

Barra	Direção	Qx (kN/m)	Qy (kN/m)
2	Local	0.0	-30.0
4	Local	0.0	30.0

Resultados de Deslocamentos e Rotações Nodais

Nó	Desloc. X (m)	Desloc. Y (m)	Rotação Z (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
2	0.000e+00	0.000e+00	X.XXXe-XX
3	+7.194e-03	+1.206e-02	-2.923e-03
4	+7.194e-03	-4.569e-04	-6.673e-03
5	+7.173e-03	-2.049e-04	+5.434e-03

Resultados de Esforços nas Barras (direções locais)

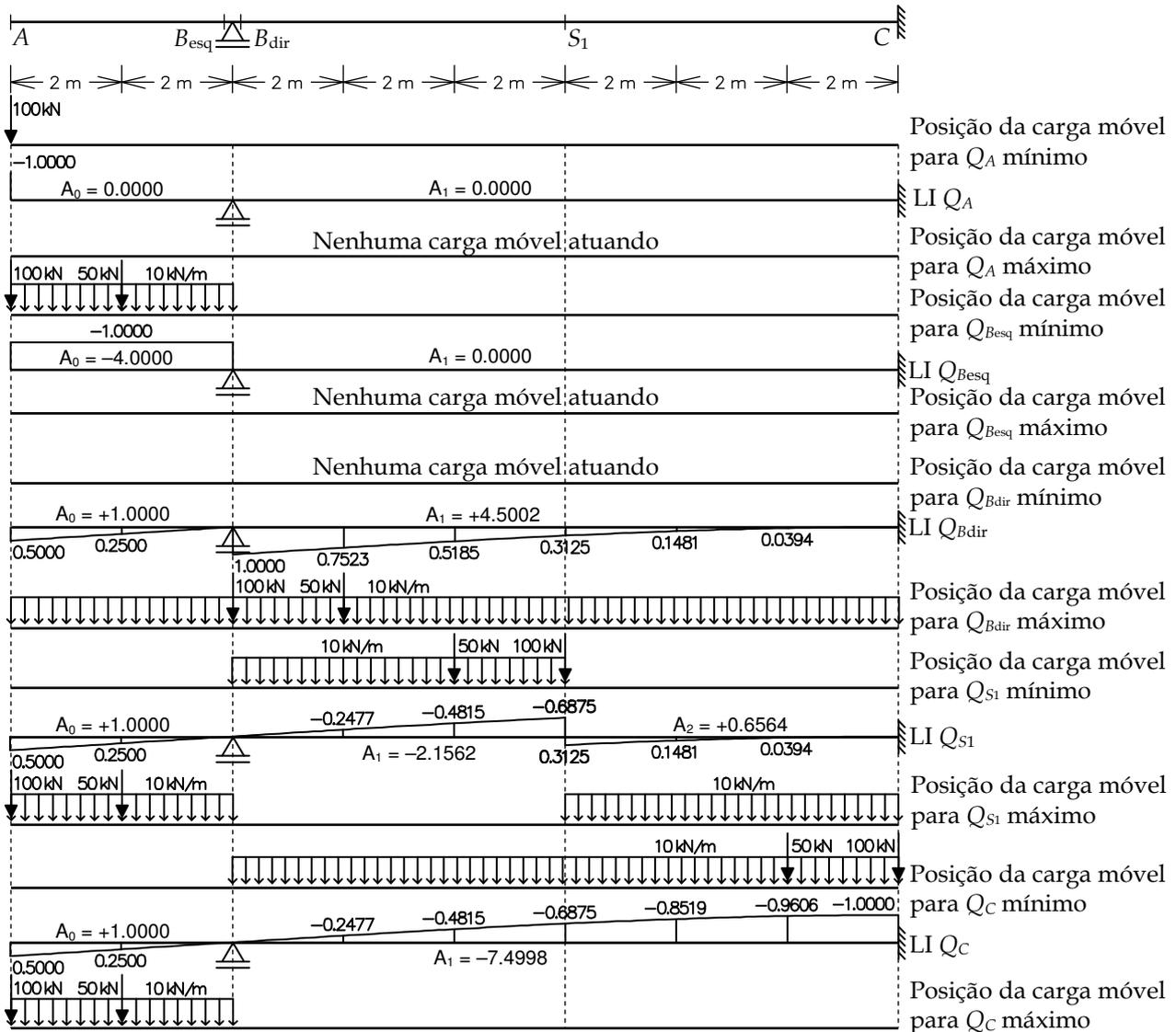
Barra	Normal		Cortante		Momento	
	Nó inicial (kN)	Nó final (kN)	Nó inicial (kN)	Nó final (kN)	Nó inicial (kNm)	Nó final (kNm)
1	+137.1	-137.1	XXX.X	XXX.X	XXX.X	XXX.X
2	+122.9	-122.9	+126.5	-6.5	+130.6	+135.4
3	0.0	0.0	-20.0	+20.0	0.0	-60.0
4	+6.5	-6.5	-122.9	-117.1	-135.4	+112.0

4ª Questão (1,0 ponto)

Grau vindo do terceiro trabalho (nota do trabalho x 0,1).

1ª Questão

Itens (a) e (c)



Item (b)

x	0 m	2 m	4 m	6 m	8 m	10 m	12 m	14 m	16 m
LI Q_A	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
LI Q_{Besq}	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
LI Q_{Bdir}	0.5000	0.2500	0.0000	0.7523	0.5185	0.3125	0.1481	0.0394	0.0000
LI Q_{S1}	0.5000	0.2500	0.0000	-0.2477	-0.4815	-0.6875	0.1481	0.0394	0.0000
LI Q_C	0.5000	0.2500	0.0000	-0.2477	-0.4815	-0.6875	-0.8519	-0.9606	-1.0000

Item (d)

Cálculo do efeito da carga permanente:

$$(Q_A)^{c.p.} = 0$$

$$(Q_{Besq})^{c.p.} = [4 \cdot 4 \cdot (-1.0000)] = -16.0 \text{ kN}$$

$$(Q_{Bdir})^{c.p.} = [4 \cdot (+1.0000) + 4 \cdot (+4.5002)] = +22.0 \text{ kN}$$

$$(Q_{S1})^{c.p.} = [4 \cdot (+1.00) + 4 \cdot (-2.1562) + 4 \cdot (+0.6564)] = -2.0 \text{ kN}$$

$$(Q_C)^{c.p.} = [4 \cdot (+1.00) + 4 \cdot (-7.4998)] = -26.0 \text{ kN}$$

Cálculo do efeito da carga móvel:

$$(Q_A)^{c.m.}_{\text{mín.}} = [100 \cdot (-1.0000)] = -100.0 \text{ kN}$$

$$(Q_A)^{c.m.}_{\text{máx.}} = 0$$

$$(Q_{\text{Besq}})^{c.m.}_{\text{mín.}} = [100 \cdot (-1.0000) + 50 \cdot (-1.0000) + 10 \cdot 4 \cdot (-1.0000)] = -190.0 \text{ kN}$$

$$(Q_{\text{Besq}})^{c.m.}_{\text{máx.}} = 0$$

$$(Q_{\text{Bdir}})^{c.m.}_{\text{mín.}} = 0$$

$$(Q_{\text{Bdir}})^{c.m.}_{\text{máx.}} = [100 \cdot (+1.0000) + 50 \cdot (+0.7523) + 10 \cdot (+1.0000) + 10 \cdot (+4.5002)] = +192.6 \text{ kN}$$

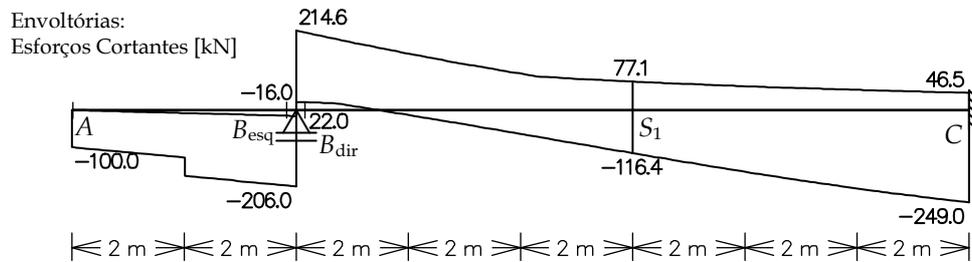
$$(Q_{S1})^{c.m.}_{\text{mín.}} = [100 \cdot (-0.6875) + 50 \cdot (-0.4815) + 10 \cdot (-2.1562)] = -114.4 \text{ kN}$$

$$(Q_{S1})^{c.m.}_{\text{máx.}} = [100 \cdot (+0.5000) + 50 \cdot (+0.2500) + 10 \cdot (+1.0000) + 10 \cdot (+0.6564)] = +79.1 \text{ kN}$$

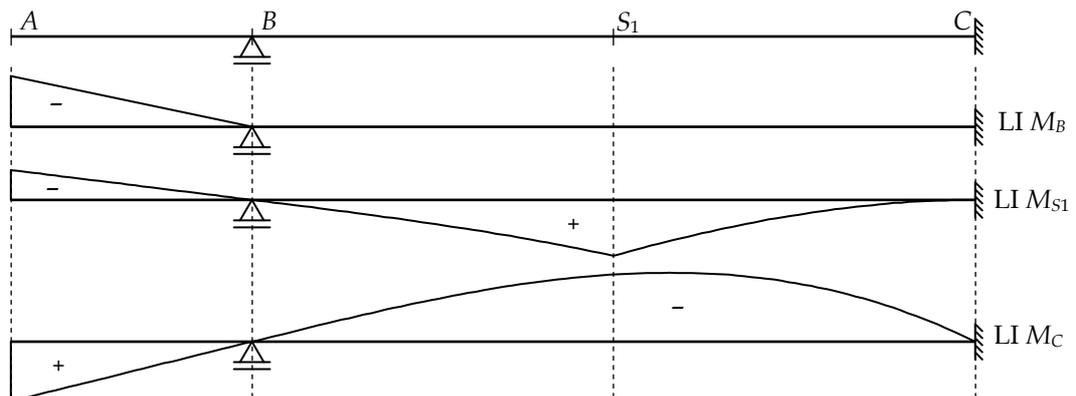
$$(Q_C)^{c.m.}_{\text{mín.}} = [100 \cdot (-1.0000) + 50 \cdot (-0.9606) + 10 \cdot (-7.4998)] = -223.0 \text{ kN}$$

$$(Q_C)^{c.m.}_{\text{máx.}} = [100 \cdot (+0.5000) + 50 \cdot (+0.2500) + 10 \cdot (+1.0000)] = +72.5 \text{ kN}$$

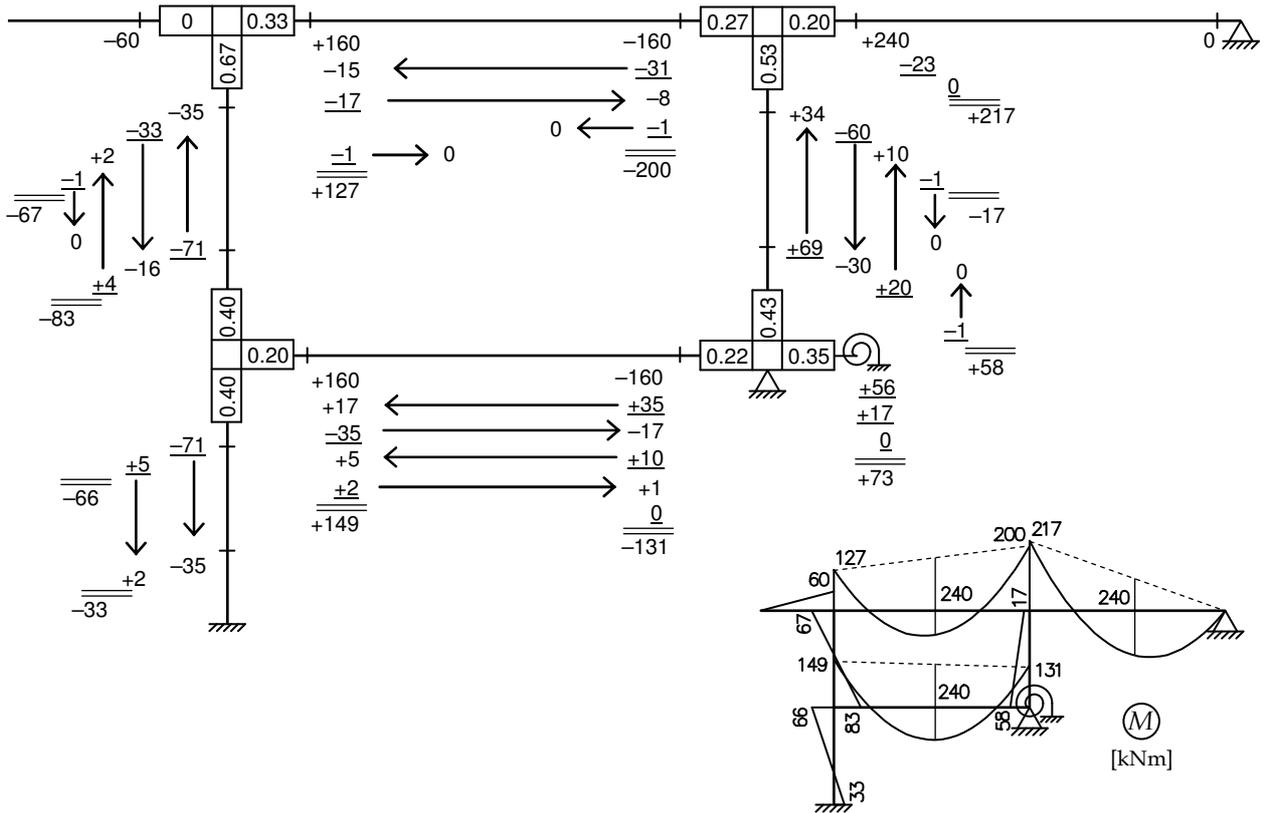
Seção	Carga Permanente	Carga Móvel		Envoltórias	
		Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo
Q_A [kN]	0.0	-100.0	0.0	-100.0	0.0
Q_{Besq} [kN]	-16.0	-190.0	0.0	-206.0	-16.0
Q_{Bdir} [kN]	+22.0	0.0	+192.6	+22.0	+214.6
Q_{S1} [kN]	-2.0	-114.4	+79.1	-116.4	+77.1
Q_C [kN]	-26.0	-223.0	+72.5	-249.0	-46.5



Item (e)

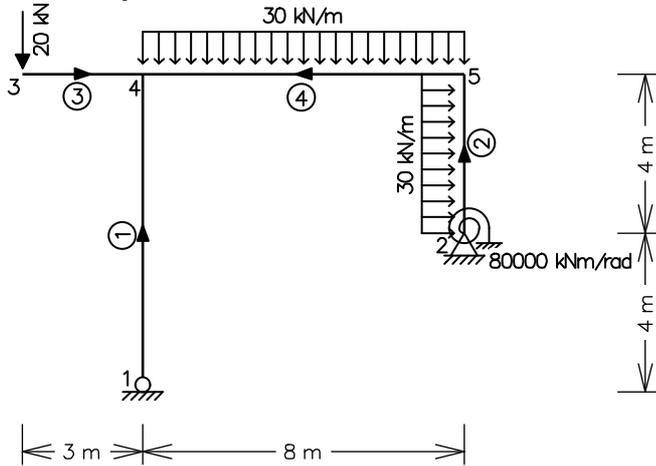


2ª Questão



3ª Questão

Desenho do modelo estrutural, com cargas, numeração de nós e numeração de barras:



Item (a)

$M_z^2 = -K_\theta \cdot \theta_z^2 = +130.6 \text{ kNm}$ (reação momento no apoio elástico rotacional no nó 2 obtida do resultado de momento fletor na extremidade inicial da barra 2). A reação momento no apoio elástico rotacional é sempre contrária à rotação do apoio.

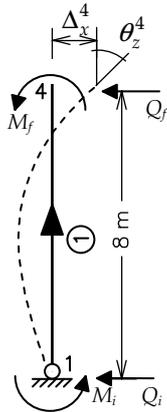
A direção do momento fletor na extremidade inicial da barra 2 tem o mesmo sentido da reação momento. $K_\theta = 80000 \text{ kNm/rad}$ (coeficiente de rigidez à rotação do apoio elástico rotacional).

$$\Rightarrow \theta_z^2 = -130.6 / 80000 = -1.6325 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad (\text{rotação do nó 2: negativo indica sentido horário})$$

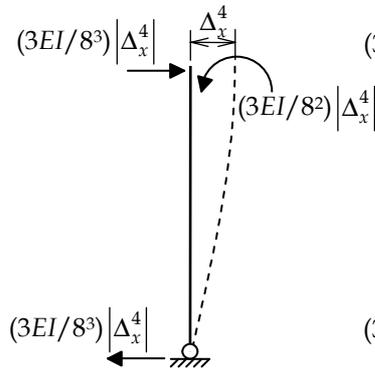
Item (b)

Determinação dos esforços internos na barra 1 a partir do deslocamento horizontal e da rotação do nó 4:

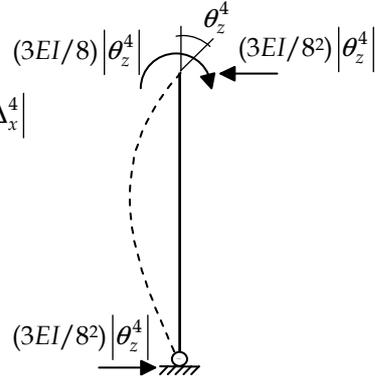
Deformada da barra 1 e esforços internos com sentidos positivos (nas direções dos eixos locais)



Isolando efeito do deslocamento horizontal do nó 4 (esforços indicados nos sentidos físicos)



Isolando efeito da rotação do nó 4 (esforços indicados nos sentidos físicos)



$$\Delta_x^4 = +7.194 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_z^4 = -6.673 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$E = 2.0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$I = 1.2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$Q_i = +(3EI/8^3)|\Delta_x^4| - (3EI/8^2)|\theta_z^4| = -6.5 \text{ kN}$$

$$M_i = 0$$

$$Q_f = -(3EI/8^3)|\Delta_x^4| + (3EI/8^2)|\theta_z^4| = +6.5 \text{ kN}$$

$$M_f = +(3EI/8^2)|\Delta_x^4| - (3EI/8)|\theta_z^4| = -52.0 \text{ kNm}$$

Item (c)

Diagrama de esforços normais

(N)
[kN]

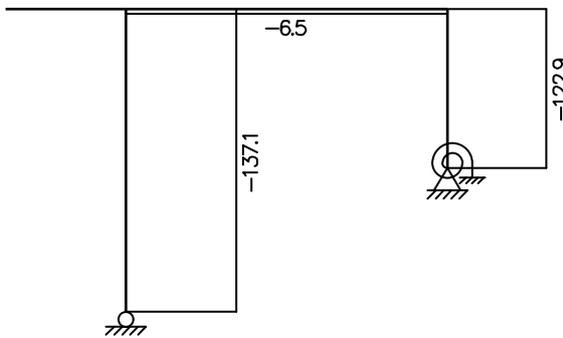


Diagrama de esforços cortantes

(Q)
[kN]

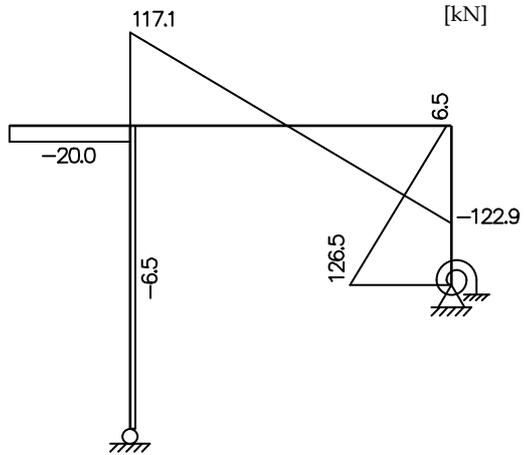


Diagrama de momentos fletores

(M)
[kNm]

