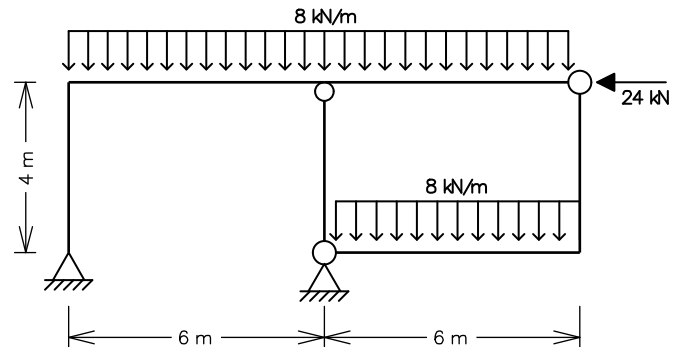


# ENG 1204 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS II - 2º Semestre - 2019

## Prova Final - 09/12/2019 - Duração: 2:30 hs - Sem Consulta

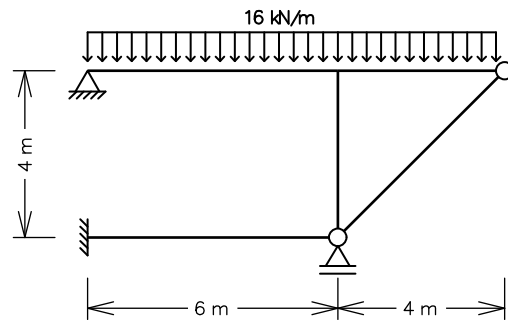
### 1ª Questão (4,0 pontos)

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão  $EI = 7.2 \times 10^4 \text{ kNm}^2$ .



### 2ª Questão (4,0 pontos)

Empregando-se o Método dos Deslocamentos, obter o diagrama de momentos fletores para o quadro ao lado (barras inextensíveis). Todas as barras têm a mesma inércia à flexão  $EI = 1.8 \times 10^5 \text{ kNm}^2$ .



### 3ª Questão (2,0 pontos)

O arquivo de dados de entrada e de resultados de análise para um programa de computador está reproduzido na folha anexa.

Os eixos do sistema local de uma barra são definidos de tal maneira que o eixo local  $x$  tem o sentido do nó inicial para o nó final. O eixo local  $y$  é perpendicular ao eixo da barra, está no plano da estrutura e é tal que o produto vetorial do eixo  $x$  pelo eixo  $y$  resulta em um vetor saindo do plano.

Nos dados de entrada do programa de computador, os valores dos carregamentos uniformemente distribuídos são fornecidos no sistema de eixos locais das barras. Isto é, um carregamento na direção local transversal à barra é positivo quando tem a direção do eixo local  $y$  e negativo quando tem a direção oposta.

Na saída do programa de computador, os esforços internos nas extremidades das barras são fornecidos nos sistemas de eixos locais das barras com a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos: esforços normais são positivos no sentido do eixo local  $x$  e negativos no sentido contrário; esforços cortantes são positivos no sentido do eixo local  $y$  e negativos no sentido contrário; e momentos fletores são positivos quando têm o sentido anti-horário e negativos no sentido contrário.

### Solicitado:

Desenhe o modelo estrutural com dimensões, apoios e carregamento (0,5 ponto). Desenhe os diagramas de esforços normais (0,5 ponto), esforços cortantes (0,5 ponto) e momentos fletores (0,5 ponto). Esforços normais de tração são positivos e de compressão são negativos. Esforços cortantes são positivos quando, entrando com as forças à esquerda de uma seção transversal (de quem olha da fibra inferior para a fibra superior), a resultante das forças na direção transversal à barra for para cima. O diagrama de momentos fletores é sempre desenhado do lado da fibra tracionada.

## Dados de Entrada e Resultados do Modelo Computacional

### Coordenadas Nodais e Condições de Suporte

Nó	X (m)	Y (m)	Desloc. X (tipo)	Desloc. Y (tipo)	Rotação Z (tipo)
1	0.0	0.0	Fixo	Fixo	Fixo
2	4.0	0.0	Fixo	Fixo	Fixo
3	8.0	0.0	Fixo	Fixo	Fixo
4	4.0	3.0	Livre	Livre	Livre
5	8.0	3.0	Livre	Livre	Livre
6	11.0	3.0	Livre	Livre	Livre

### Dados das Barras

Barra	Nó inicial	Nó final	Rótula inicial	Rótula final	Mod.Elast. (kN/m <sup>2</sup> )	Área Seção (m <sup>2</sup> )	Mom.Inércia (m <sup>4</sup> )
1	1	4	Não	Não	2.0e+08	0.012	0.0012
2	2	4	Sim	Não	2.0e+08	0.012	0.0012
3	3	5	Não	Não	2.0e+08	0.012	0.0012
4	4	5	Não	Não	2.0e+08	0.012	0.0012
5	6	5	Não	Não	2.0e+08	0.012	0.0012

### Dados de Carregamentos Uniformemente Distribuídos em Barras

Barra	Direção	Qx (kN/m)	Qy (kN/m)
1	Local	0.0	-36.0
4	Local	0.0	-36.0
5	Local	0.0	36.0

### Resultados de Deslocamentos e Rotações Nodais

Nó	Desloc. X (m)	Desloc. Y (m)	Rotação Z (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
2	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
3	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
4	+3.149e-04	-1.909e-04	+2.116e-05
5	+3.387e-04	-2.545e-04	-3.151e-04
6	+3.387e-04	-2.719e-03	-9.901e-04

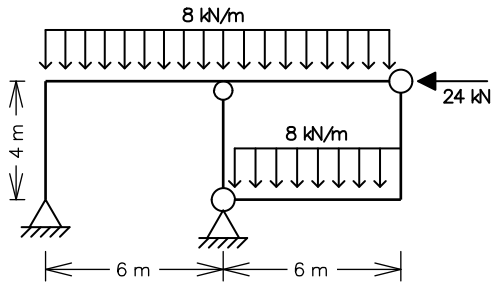
### Resultados de Esforços nas Barras (direções locais)

Barra	Normal		Cortante		Momento	
	Nó inicial (kN)	Nó final (kN)	Nó inicial (kN)	Nó final (kN)	Nó inicial (kNm)	Nó final (kNm)
1	-65.9	+65.9	+99.1	+80.9	+96.7	-51.3
2	+152.7	-152.7	+10.1	-10.1	0.0	+30.3
3	+203.6	-203.6	-14.3	+14.3	+3.8	-46.6
4	-14.3	+14.3	+48.4	+95.6	+21.0	-115.4
5	0.0	0.0	0.0	-108.0	0.0	+162.0

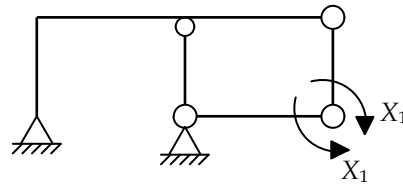
Solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{bf - de}{ad - bc} \\ X_2 = \frac{ce - af}{ad - bc} \end{cases}$$

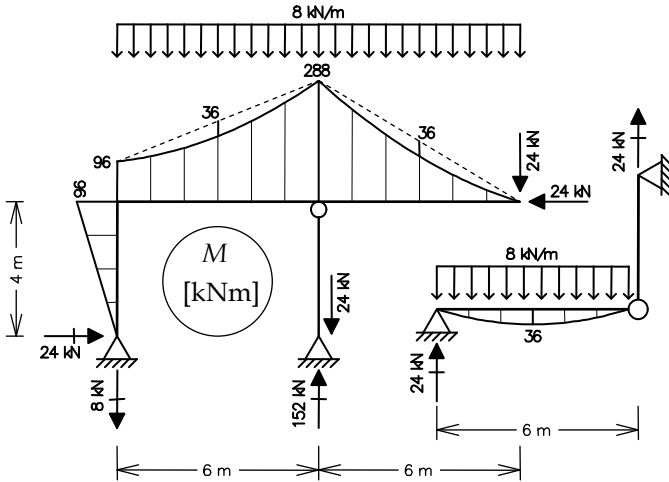
**Prova Final - 1ª Questão**



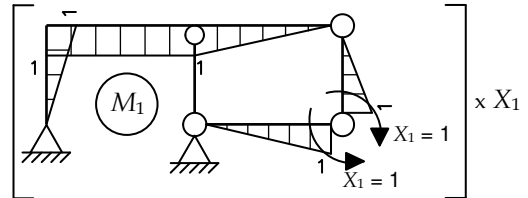
Sistema Principal (SP) e Hiperestático ( $g = 1$ )



Caso (0) - Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) - Hiperestático  $X_1$  isolado no SP



Equação de compatibilidade:

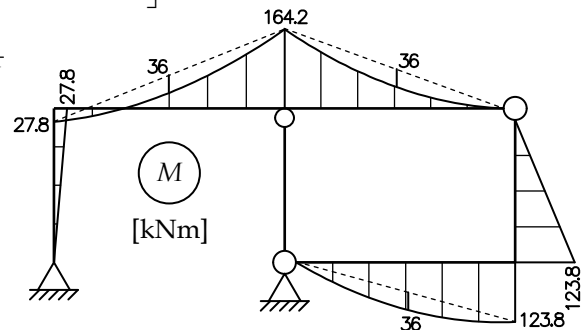
$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{EI}(-1568) + \frac{38}{3EI} X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = +123.8 \text{ kNm}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \begin{aligned} &-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 96 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 288 \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 288 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 6 \\ &-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 96 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 36 \cdot 6 \end{aligned} \right] = -\frac{1568}{EI}$$

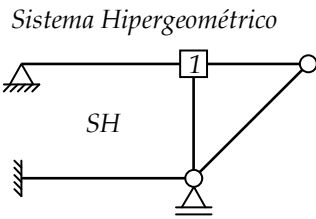
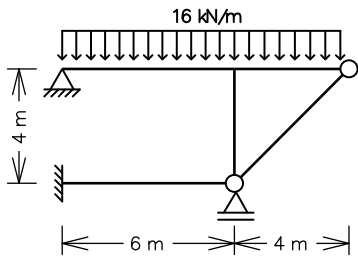
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ +(1 \cdot 1 \cdot 6) + 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \right) + 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right) \right] = +\frac{38}{3EI}$$

Momentos Fletores Finais:

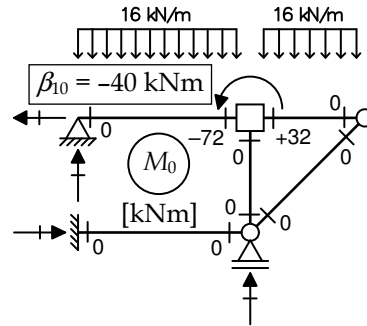
$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



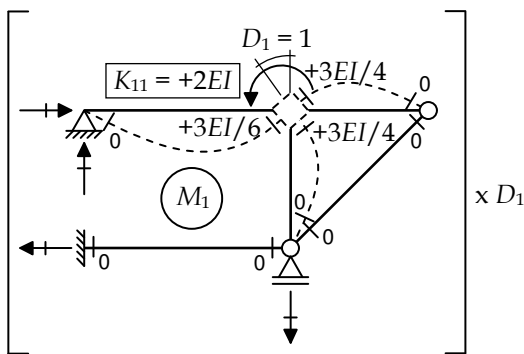
**Prova Final - 2ª Questão**



Caso (0) - Solicitação externa isolada no SH



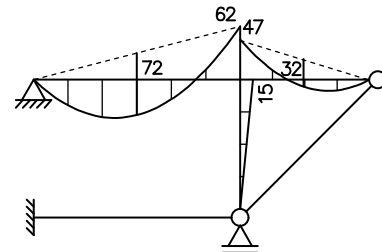
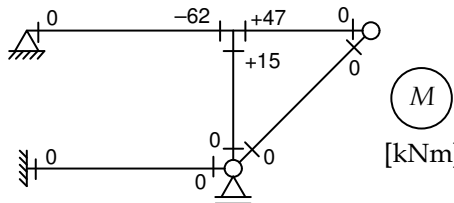
Caso (1) - Deslocabilidade  $D_1$  isolada no SH



Equação de equilíbrio:

$$\beta_{10} + K_{11}D_1 = 0 \Rightarrow -40 + 2EI \cdot D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = +\frac{20}{EI}$$

Momentos Fletores Finais:  
 $M = M_0 + M_1 \cdot D_1$



**Prova Final - 3ª Questão**

Modelo estrutural

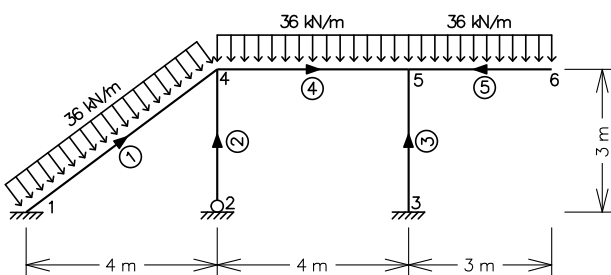


Diagrama de esforços normais

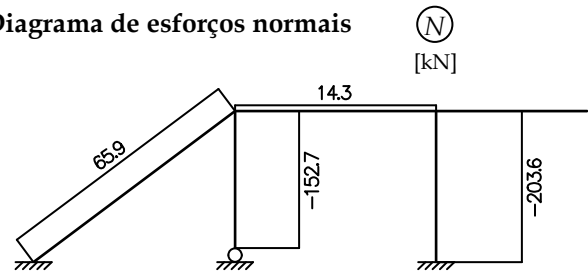


Diagrama de esforços cortantes

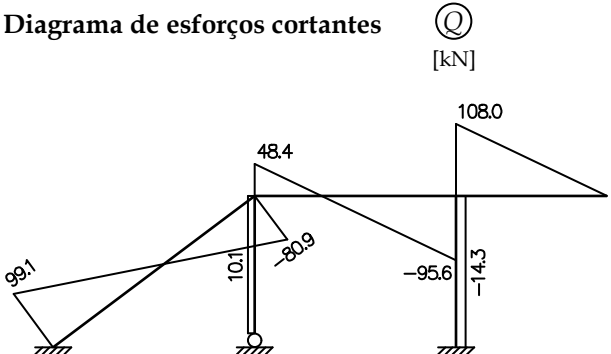


Diagrama de momentos fletores

