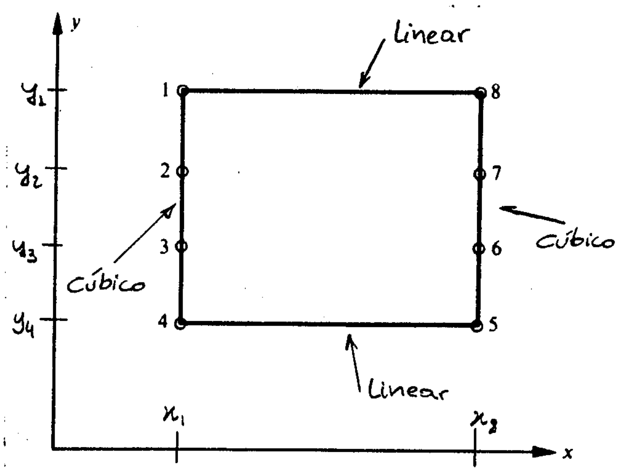
Elementos Finitos Planos de Continuidade C^0

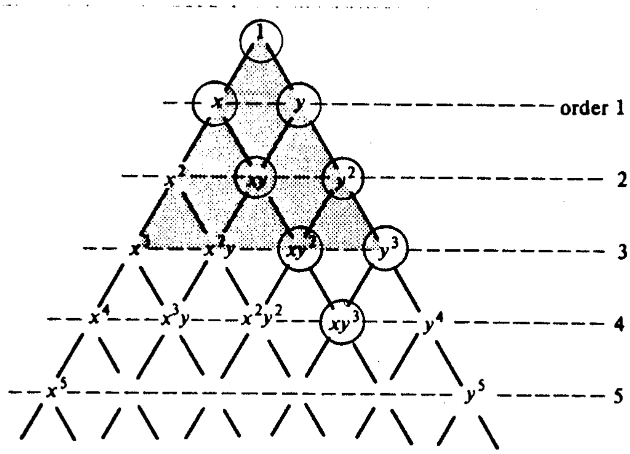
- Elementos retangulares

  – Motivação



8 nós ⇒ 8 termos no polinômio (no mínimo)

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 xy^2 + a_7 y^3 + a_8 xy^3$$



Triângulo de Pascal mostrando os termos de um polinômio completo do 3° grau e os termos considerados na interpolação do elemento acima. Vê-se que o único polinômio completo é o linear $u = a_1 + a_2 x + a_3 y$.

Se for adotado: $N_{I1}(x) = \dfrac{(x_8 - x)}{(x_8 - x_1)}$ $\qquad N_{I8}(x) = \dfrac{(x_1 - x)}{(x_1 - x_8)}$

$$N_{J1}(y) = \frac{(y_2 - y)(y_3 - y)(y_4 - y)}{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_4 - y_1)}$$

$$N_{J2}(y) = \frac{(y_1 - y)(y_3 - y)(y_4 - y)}{(y_1 - y_2)(y_3 - y_2)(y_4 - y_2)}$$

$$N_{J3}(y) = \frac{(y_1 - y)(y_2 - y)(y_4 - y)}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)(y_4 - y_3)}$$

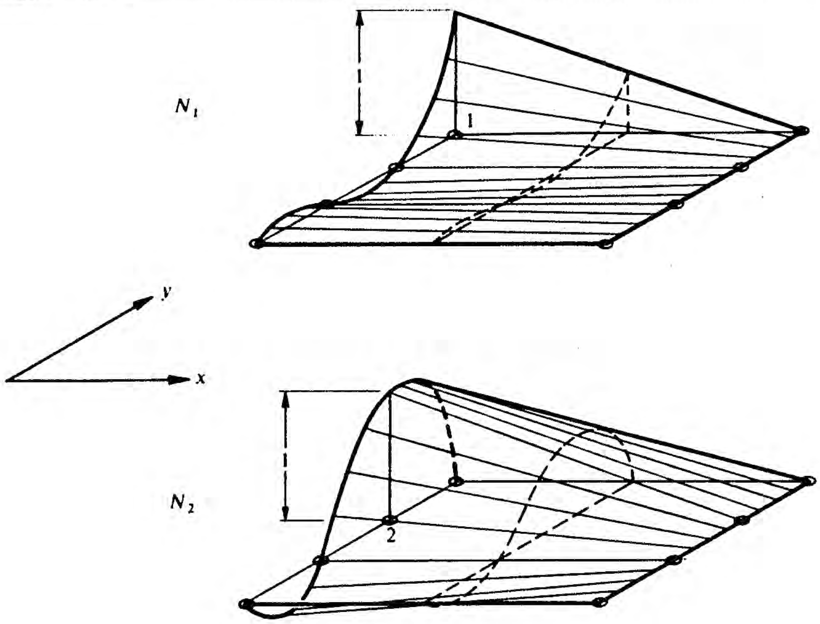
$$N_{J4}(y) = \frac{(y_1 - y)(y_2 - y)(y_4 - y)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)}$$

$N_1(x,y) = N_{I1}(x).N_{J1}(y)$ $\qquad N_8(x,y) = N_{I8}(x)\, N_{J1}(y)$

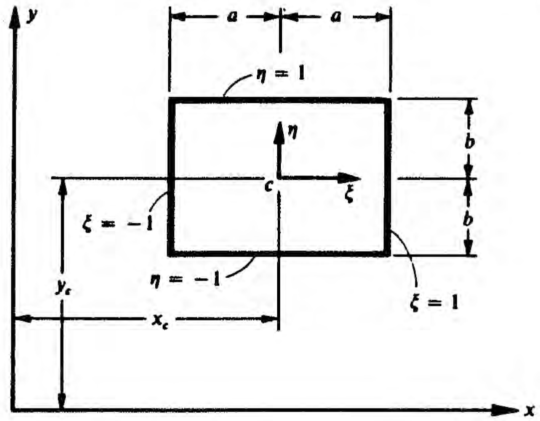
$N_2(x,y) = N_{I1}(x).N_{J2}(y)$ $\qquad N_7(x,y) = N_{I8}(x)\, N_{J2}(y)$

$N_3(x,y) = N_{I1}(x).N_{J3}(y)$ $\qquad N_6(x,y) = N_{I8}(x)\, N_{J3}(y)$

$N_4(x,y) = N_{I1}(x).N_{J4}(y)$ $\qquad N_5(x,y) = N_{I8}(x)\, N_{J4}(y)$



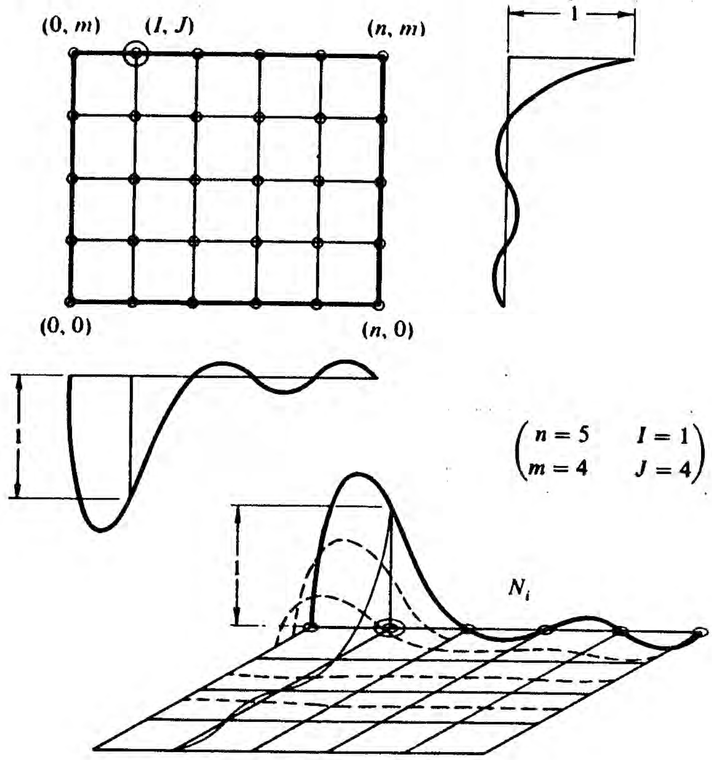
— Normalização de coordenadas



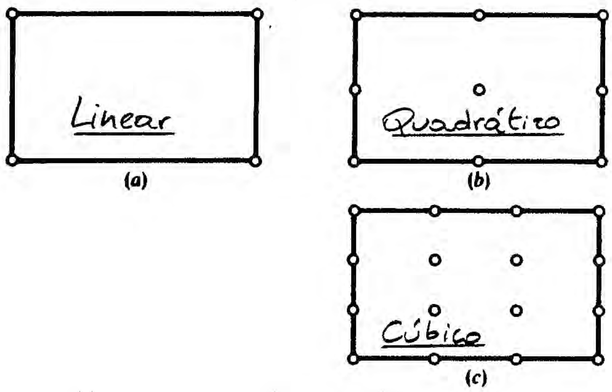
$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \qquad d\xi = \frac{dx}{a}$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{b} \qquad d\eta = \frac{dy}{b}$$

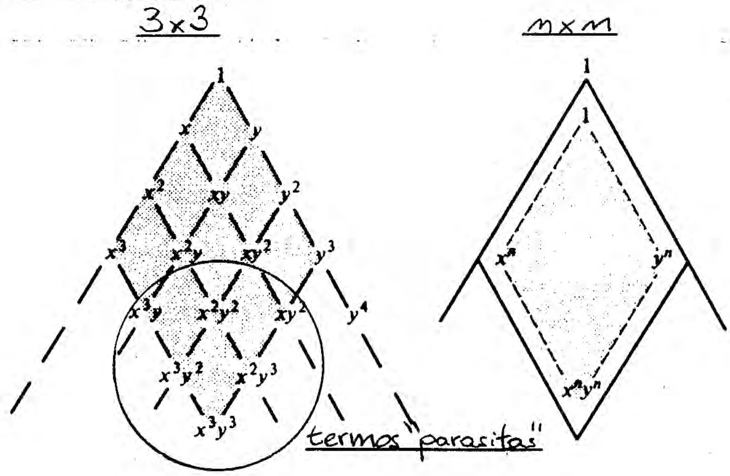
— Família Lagrangeana



$$l_k^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_0)(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \cdots (\xi_k - \xi_n)} \qquad N_i \equiv N_{IJ} = l_I^n(\xi) l_J^m(\eta)$$

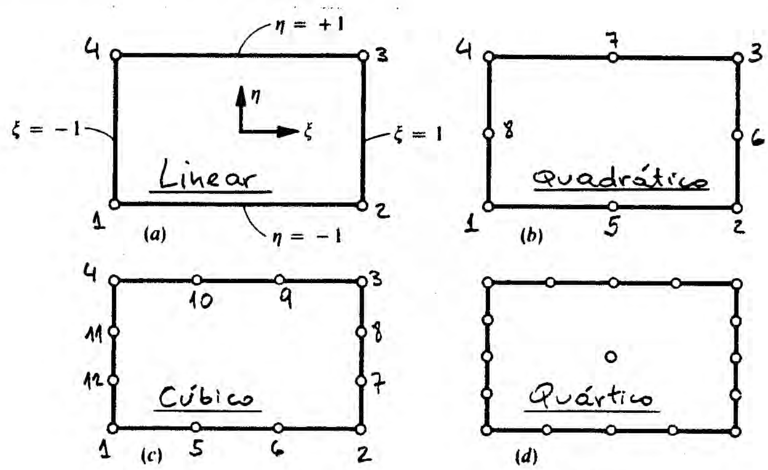


Termos do triângulo de Pascal resultantes de uma expansão Lagrangeana



Vê-se que há um excessivo número de termos além do polinômio completo de mais alto grau pertencente à formulação.
Lembre-se que a velocidade de convergência depende do polinômio completo de mais alto grau.

— Família "Serendipity"



Idéia:

Para evitar os termos "parasitas" do triângulo de Pascal, ainda garantindo continuidade com polinômios de qualquer grau no contorno do elemento, procura-se posicionar os nós o máximo possível somente no contorno do elemento.

Elemento Linear

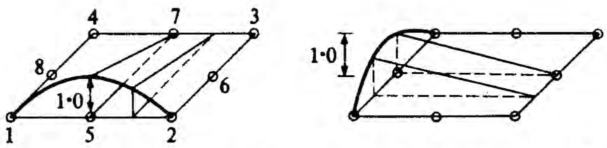
$$
\left.
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned}
\right\}
\qquad
\boxed{N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)}
$$

Nó i	ξ_i	η_i
1	−1	−1
2	1	−1
3	1	1
4	−1	1

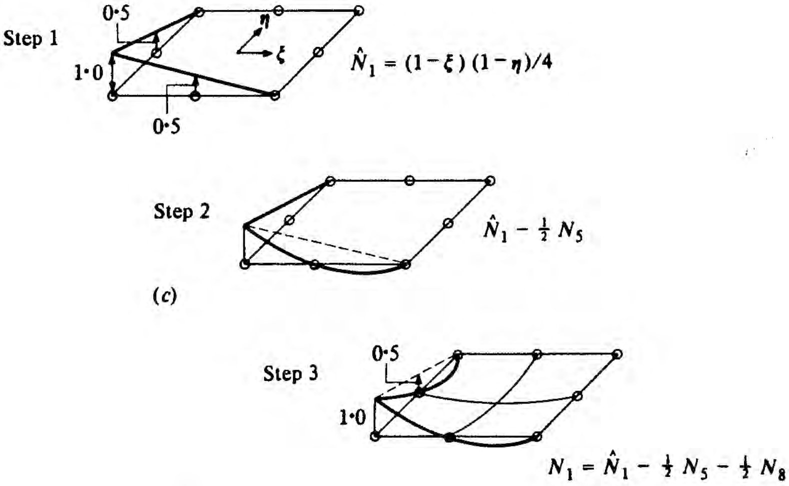
Este elemento também pertence à família Lagrangeana.

As funções de forma dos outros elementos da família Serendipity são construídas de uma maneira sistemática, que foi descoberta por acaso (daí a denominação Serendipity).

Quadrático



(a) $N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$ (b) $N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$



(c)

Nós dos cantos : $\boxed{N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1)}$
$(i=1,2,3,4)$

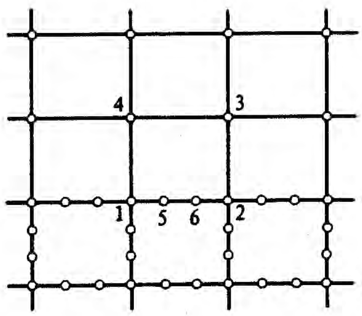
Nós dos meios dos lados: $\xi_i = 0$ $\boxed{N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)}$
$(i=5,6,7,8)$

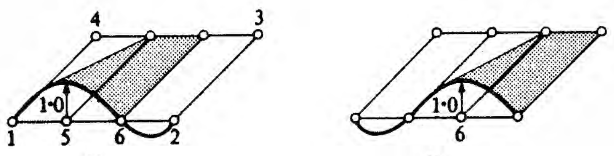
$\eta_i = 0$ $\boxed{N_i = \frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)}$

Shape Functions for the Plane Quadratic Isoparametric Element, Written in a Form that Permits a Variable Number of Nodes

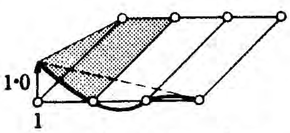
	4 Linear Edges	3, 2, 1, or 0 Linear Edges, Others Quadratic			
N_i	Include Nodes 1 to 4	Add Node 5	Add Node 6	Add Node 7	Add Node 8
N_1	$(1-\xi)(1-\eta)/4$	$-N_5/2$			$-N_8/2$
N_2	$(1+\xi)(1-\eta)/4$	$-N_5/2$	$-N_6/2$		
N_3	$(1+\xi)(1+\eta)/4$		$-N_6/2$	$-N_7/2$	
N_4	$(1-\xi)(1+\eta)/4$			$-N_7/2$	$-N_8/2$
N_5		$(1-\xi^2)(1-\eta)/2$			
N_6			$(1+\xi)(1-\eta^2)/2$		
N_7				$(1-\xi^2)(1+\eta)/2$	
N_8					$(1-\xi)(1-\eta^2)/2$

Cúbico





N_5 N_6



$N_1 = \hat{N}_1 - \frac{2}{3} N_5 - \frac{1}{3} N_6$

Nós dos cantos: $(i=1,2,3,4)$

$$\boxed{N_i = \frac{1}{32}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(-10+9\xi^2+9\eta^2)}$$

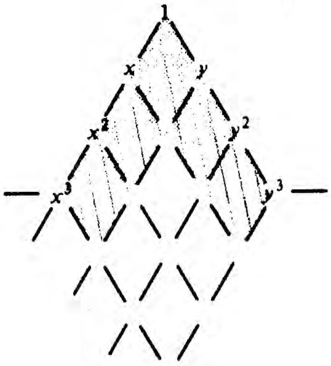
Nós do meio dos lados $\xi=\pm 1$ $\left(\eta_i = \pm\frac{1}{3}\right)$ $(i=7,8,11,12)$

$$\boxed{N_i = \frac{9}{32}(1+\xi\xi_i)(1+9\eta\eta_i)(1-\eta^2)}$$

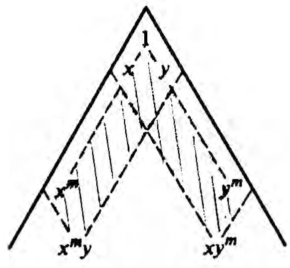
Nós do meio dos lados $\eta=\pm 1$ $\left(\xi_i = \pm\frac{1}{3}\right)$ $(i=5,6,9,10)$

$$\boxed{N_i = \frac{9}{32}(1+9\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1-\xi^2)}$$

Termos do triângulo de Pascal decorrentes das funções de forma <u>de bordo</u> dos elementos do tipo "serendipity".



<u>3x3</u>



<u>m x m</u>

n = nº de termos gerados

$$\boxed{n = (m+1) \times 4 - 4}$$

$m = 1 \Rightarrow n = 4$

$m = 2 \Rightarrow n = 8$

$m = 3 \Rightarrow n = 12$

<u>Quártico</u> $(m=4)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & x & & y & & & \\
 & & x^2 & & xy & & y^2 & & \\
 & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 & \\
x^4 & & x^3y & & \bigcirc & & xy^3 & & y^4 \\
 & x^4y & & & & & & xy^4 &
\end{array}$$

$m = 4 \Rightarrow n = 16$

$\Downarrow$

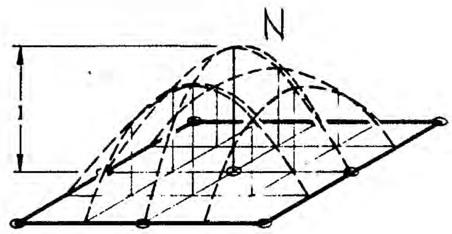
são necessários 16 nós no contorno do elemento.

Para que se tenha um polinômio completo do quarto grau, é necessário que o termo x^2y^2 seja também considerado.

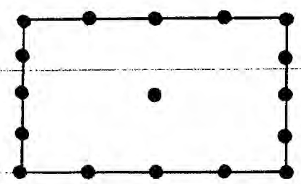
Isto é conseguido adicionando-se um nó interno cuja função de forma é:

$$N = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

que é nula em todos os bordos do elemento.



Com mais um nó interior, tem-se um total de 17 nós.



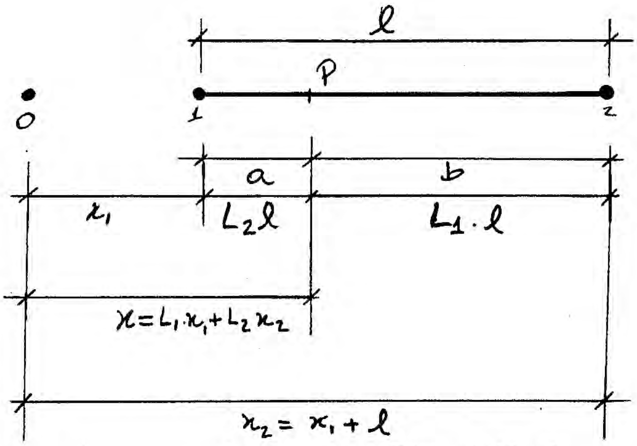
- <u>Elementos triangulares</u>

— <u>Coordenadas naturais para triângulos</u>

<u>Vantagem:</u>

- independem do sistema de coordenadas
- tratamento natural para triangulos e tetraedros (simetria triangular)

— <u>Caso unidemensional</u> (L_1, L_2)



$$a + b = \ell$$

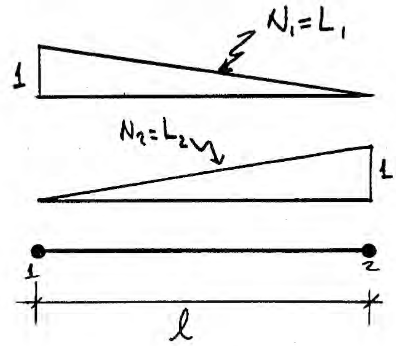
$$\boxed{L_1 = \frac{b}{\ell}} \qquad \boxed{L_2 = \frac{a}{\ell}}$$

$$\boxed{L_1 + L_2 = 1}$$

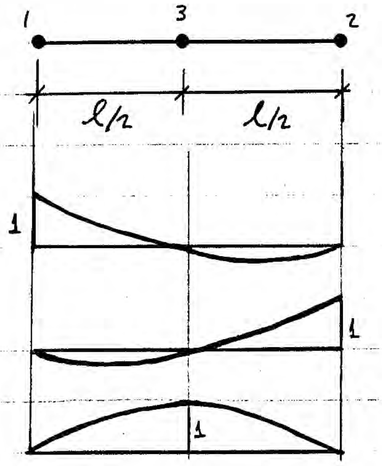
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix}$$

<u>Interpolação linear</u>:

$$\boxed{N_1 = L_1} \qquad \boxed{N_2 = L_2} \qquad \phi = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$



Interpolação quadrática:



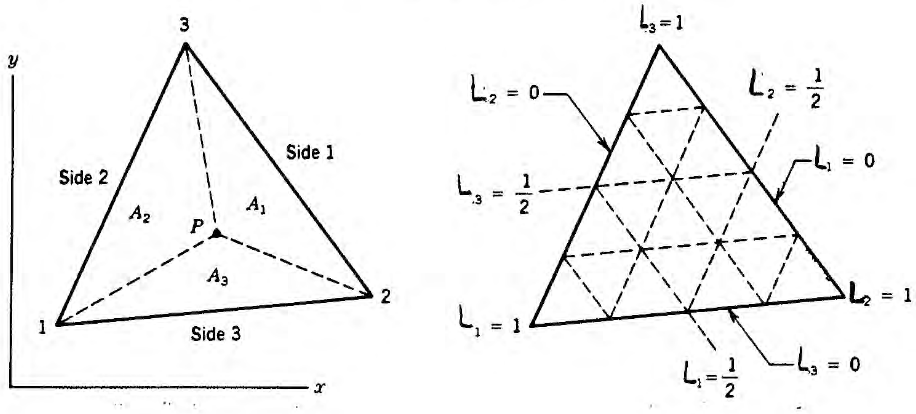
$$\boxed{N_1 = L_1(2L_1 - 1)} \quad \text{ou} \quad \boxed{N_1 = L_1 - N_3/2}$$

$$\boxed{N_2 = L_2(2L_2 - 1)} \quad \text{ou} \quad \boxed{N_2 = L_2 - N_3/2}$$

$$\boxed{N_3 = 4L_1L_2}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

– Caso bidimensional: Coordenadas de área (L_1, L_2, L_3)
(coordenadas baricêntricas)

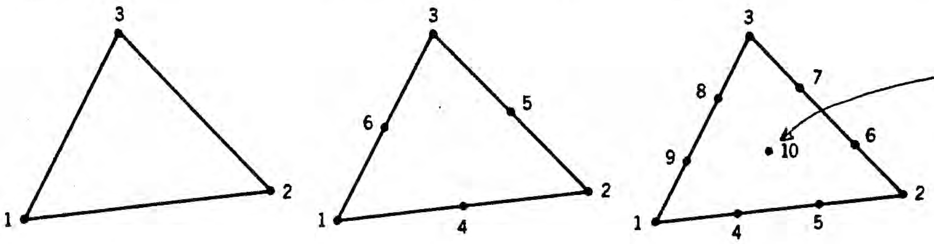


$$\boxed{L_1 = \frac{A_1}{A}} \qquad \boxed{L_2 = \frac{A_2}{A}} \qquad \boxed{L_3 = \frac{A_3}{A}}$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \qquad \boxed{L_1 + L_2 + L_3 = 1}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) \\ (x_3y_1 - x_1y_3) & (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) \\ (x_1y_2 - x_2y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

Os elementos triangulares pertencem à família Lagrangeana:

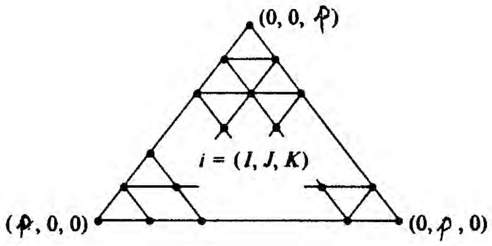


$(L_1, L_2, L_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(a) Linear

(b) Quadrático

(c) Cúbico



$$N_i = l_I^I(L_1)\, l_J^J(L_2)\, l_K^K(L_3)$$

interpolação lagrangeana em L_1, L_2, L_3

$$I + J + K = p$$

$p \rightarrow$ grau do polinômio de interpolação

Interpolação linear $(p = 1)$:

$\boxed{N_1 = L_1}$ $\boxed{N_2 = L_2}$ $\boxed{N_3 = L_3}$

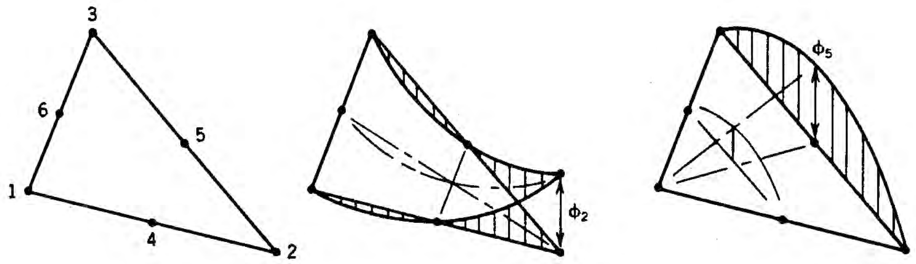
$$\phi = [N_1 \;\; N_2 \;\; N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

Interpolação quadrática:

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1) \qquad N_2 = L_2(2L_2 - 1) \qquad N_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_4 = 4L_1L_2 \qquad N_5 = 4L_2L_3 \qquad N_6 = 4L_3L_1$$

$$\phi = \sum_{i=1}^{6} N_i \phi_i$$



Interpolação cúbica:

$$N_1 = \frac{1}{2} L_1 (3L_1 - 1)(3L_1 - 2) \qquad N_2 = \frac{1}{2} L_2 (3L_2 - 1)(3L_2 - 2) \qquad N_3 = \frac{1}{2} L_3 (3L_3 - 1)(3L_2 - 2)$$

$$N_4 = \frac{9}{2} L_2 L_1 (3L_1 - 1) \qquad N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1) \qquad N_6 = \frac{9}{2} L_3 L_2 (3L_2 - 1)$$

$$N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_3 - 1) \qquad N_8 = \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_3 - 1) \qquad N_9 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_1 - 1)$$

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3$$

Formulação Isoparamétrica

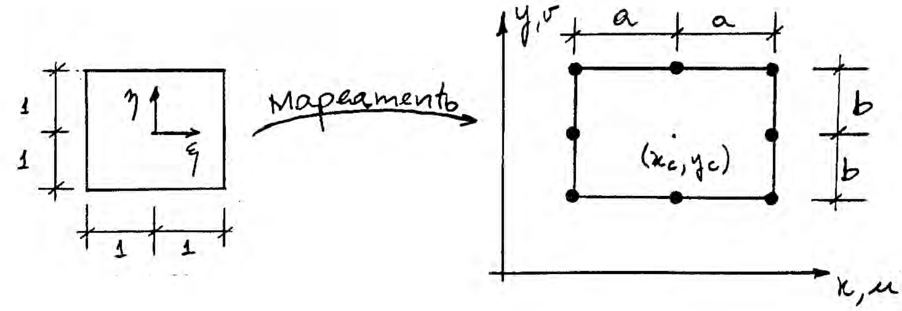
- Objectivo principal

Criar elementos quadriláteros não retangulares e elementos com arestas curvas.

- Motivação

Até agora a geometria (coordenadas dos pontos) de um elemento quadrilátero era definida diretamente em relação aos eixos cartesianos. Desta forma, somente elementos retangulares, paralelos os eixos, foram considerados. No caso de um elemento triangular, a formulação permitia uma orientação qualquer do elemento, mas sempre mantendo os lados retos.

Também foi considerada uma mudança de coordenadas para interpolar deslocamentos no interior do elemento em função de deslocamentos nodais.



As funções de forma, escritas em termos de coordenadas normalizadas ou paramétricas (ξ, η), interpolam os deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N(\xi,\eta)]\{d\}$$

Dentro da formulação do método dos elementos finitos, a expressão para a matriz de rigidez do elemento

$$[K] = \int_V [B]^T [E] [B] \, dV$$

envolve derivadas das funções de interpolação em relação às coordenadas cartesianas (x, y) (isto aparece em $[B]$).

Para efetuar esta integração é necessário considerar a mudança de coordenadas de (x, y) para (ξ, η) ou vice-versa, dependendo dos limites de integração utilizados (se em coordenadas cartesianas ou em paramétricas).

Implícito dentro destas considerações está o mapeamento retangular (não distorcido) entre a geometria do elemento no espaço paramétrico (ξ, η) e no espaço cartesiano (x, y):

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \qquad \eta = \frac{y - y_c}{b}$$

Em outras palavras, enquanto os deslocamentos do modelo podem ter uma variação geral (com um polinômio de qualquer ordem), a geometria do elemento quadrilátero (isto é, as coordenadas de seus pontos interiores) tem um mapeamento linear e retangular (mostrado acima) em relação às coordenadas dos seus cantos $(x_c \pm a, y_c \pm b)$.

De maneira análoga, a geometria de um elemento triangular fica completamente definida em função dos nós dos cantos, não dependendo das coordenadas dos outros nós (pontos de interpolação para deslocamentos) que este elemento possa ter:

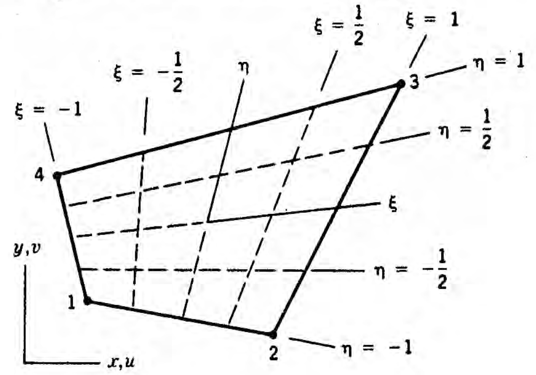
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

Neste caso, para o obtenção da matriz [K], deve-se considerar a mudança de coordenadas entre (L_1, L_2, L_3) e (x, y), pois a matriz [B] envolve derivadas em relação a (x,y) mas é descrita em função de $[L_1, L_2, L_3]$.

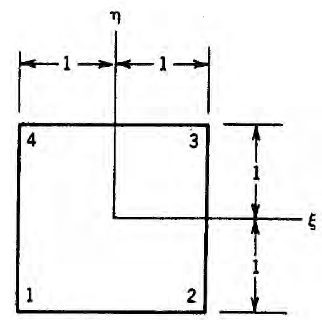
A ideia principal da formulação isoparamétrica está em interpolar a geometria do elemento (coordenadas de seus pontos) em função de coordenadas nodais, da mesma forma (daí o prefixo "iso") que os deslocamentos são interpolados.

- Exemplos de interpolação isoparamétrica

Mapeamento bi-linear



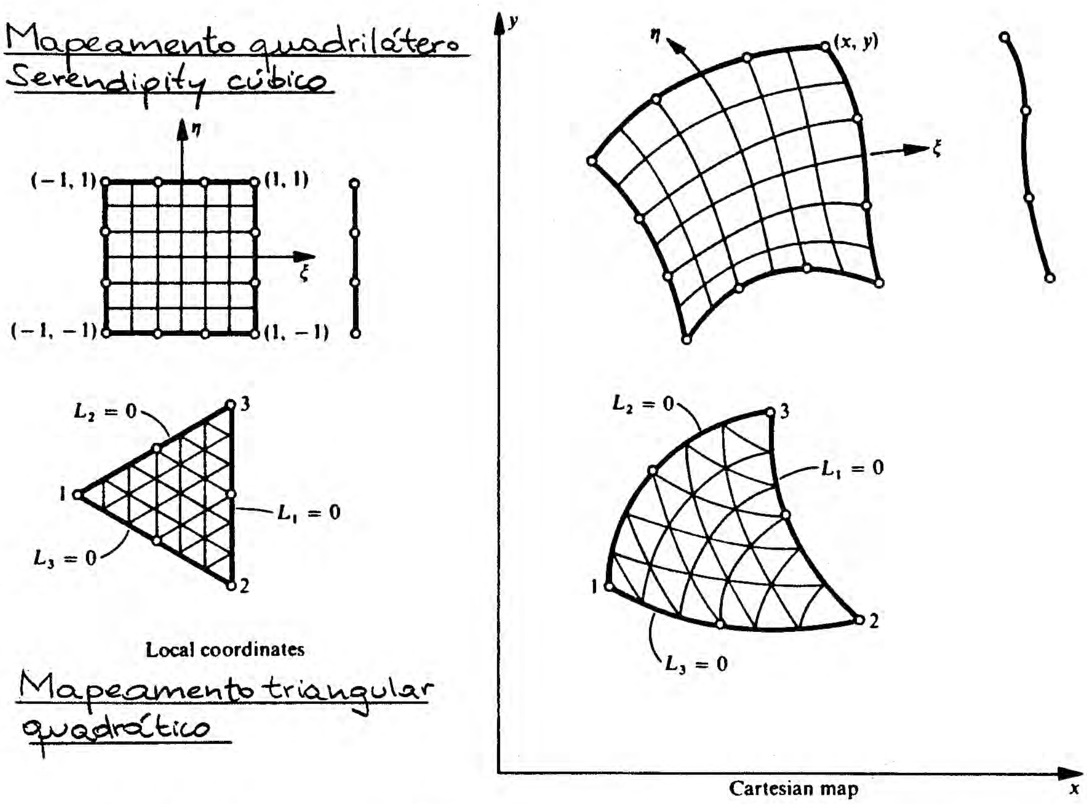
(a)



(b)

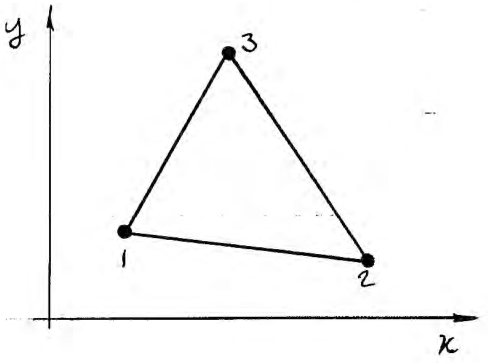
Espaço cartesiano

Espaço paramétrico



• Formulações Subparamétrica, Isoparamétrica e Superparamétrica

Seja $\{c\}$ o vetor das coordenadas nodais de um elemento. Exemplo:



$$\{c\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

Defina a interpolação das coordenadas dos pontos do elemento por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [M]\{c\}$$

onde [M] é uma matriz de mapeamento análoga à matriz das funções de forma [N], só que ao invés de interpolar deslocamentos, como em

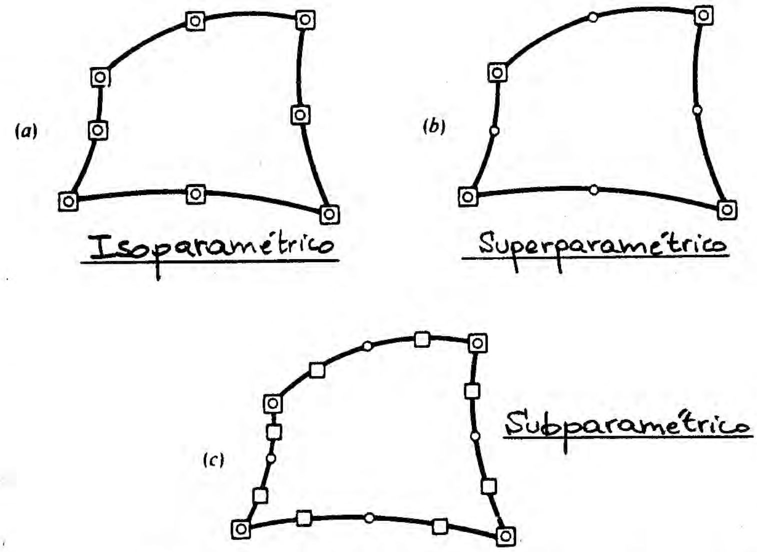
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{d\},$$

[M] interpola coordenadas.

A interpolação é dita <u>subparamétrica</u> quando o grau das funções de [N] é maior do que em [M]. Neste caso o número de nós do elemento que são utilizados para interpolar as coordenadas cartesianas é menor do que o número de nós utilizados para interpolar deslocamentos.

A interpolação é dita <u>isoparamétrica</u> quando as matrizes [M] e [N] são iguais. Neste caso os mesmos pontos nodais são utilizados para interpolar tanto posição quanto deslocamentos.

A interpolação é dita <u>superparamétrica</u> quando o grau de [N] é menor do grau de [M]. Nestes caso um menor número de nós é utilizado para interpolar deslocamentos do que é para interpolar coordenadas.

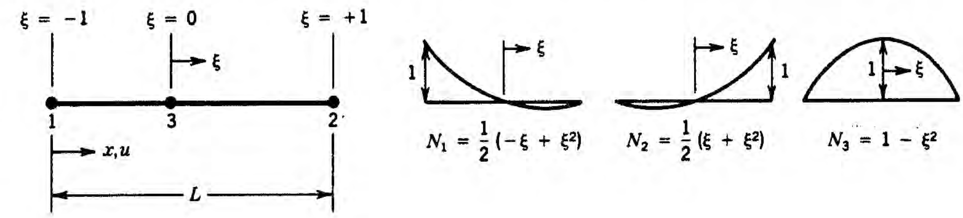


Isoparamétrico — Superparamétrico — Subparamétrico

o — pontos onde coordenadas são especificadas

□ — pontos onde deslocamentos são especificados

- Elemento unidimensional, isoparamétrico, quadrático e C^0



$$x = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Deformação:
$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_3}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

ou $\varepsilon_x = [B]\{d\}$

Neste caso, como $[N]$ depende de ξ, a regra da cadeia tem que ser utilizada para fazer a diferenciação:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} .$$

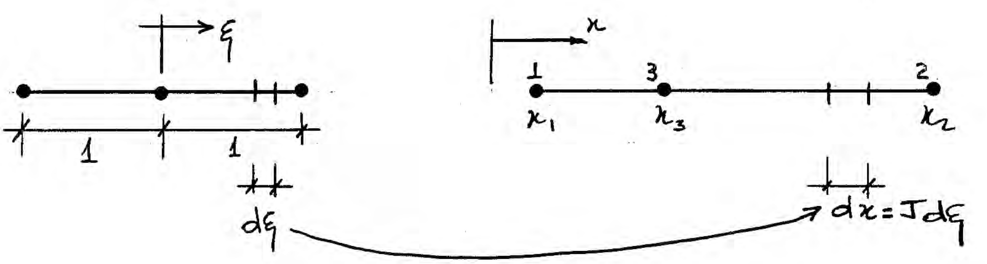
A derivada $d\xi/dx$ é calculada a partir da sua inversa. Utilizando a interpolação isoparamétrica para a coordenada cartesiana x ao longo do elemento tem-se:

$$\frac{dx}{d\xi} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_2}{d\xi} & \frac{dN_3}{d\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Esta derivada da coordenada de posição em função da coordenada paramétrica é chamada de <u>Jacobiano</u>

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}[N]\{c\} .$$

J é um fator de escala do mapeamento que leva do espaço paramétrico para o espaço cartesiano.



$$\boxed{J = \frac{d}{d\xi}[N]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \left[\frac{1}{2}(-1+2\xi) \quad \frac{1}{2}(1+2\xi) \quad (-2\xi)\right]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}}.$$

No caso da deformação ε_x, tem-se:

$$\varepsilon_x = [B]\{d\} \quad , \text{ onde } \quad [B] = \frac{d}{dx}[N] = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi}[N] = \frac{1}{J}\frac{d}{d\xi}[N].$$

$$\boxed{[B] = \frac{1}{J}\left[\frac{1}{2}(-1+2\xi) \quad \frac{1}{2}(1+2\xi) \quad (-2\xi)\right]}$$

Integração: matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez do elemento é dada por:

$$[k] = \int_{x_1}^{x_2} [B]^T EA\,[B]\,dx$$

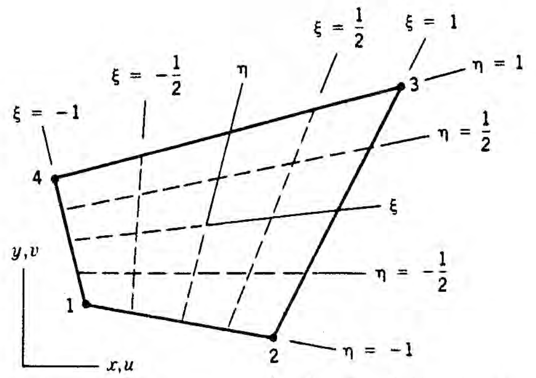
De uma forma geral, a integração com a mudança de variável pode ser feita como mostrado abaixo:

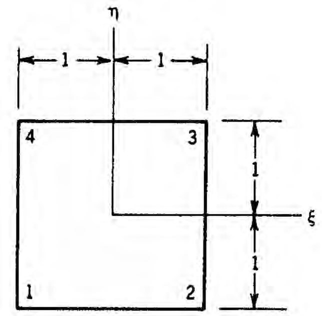
$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(x)\,dx = \int_{\xi(x_1)}^{\xi(x_2)} \phi(x(\xi))\frac{dx}{d\xi}\,d\xi = \int_{-1}^{+1} \phi(x(\xi))\,J\,d\xi$$

Assim,

$$[k] = \int_{-1}^{1} \frac{EA}{J}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+2\xi) \\ \frac{1}{2}(1+2\xi) \\ (-2\xi) \end{bmatrix}\left[\frac{1}{2}(-1+2\xi) \quad \frac{1}{2}(1+2\xi) \quad (-2\xi)\right]\right) d\xi$$

- ## Mapeamento isoparamétrico bi-linear





Neste caso,

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i \, x_i \qquad\qquad y = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad\qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad\qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Diferenciação e Jacobiano

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

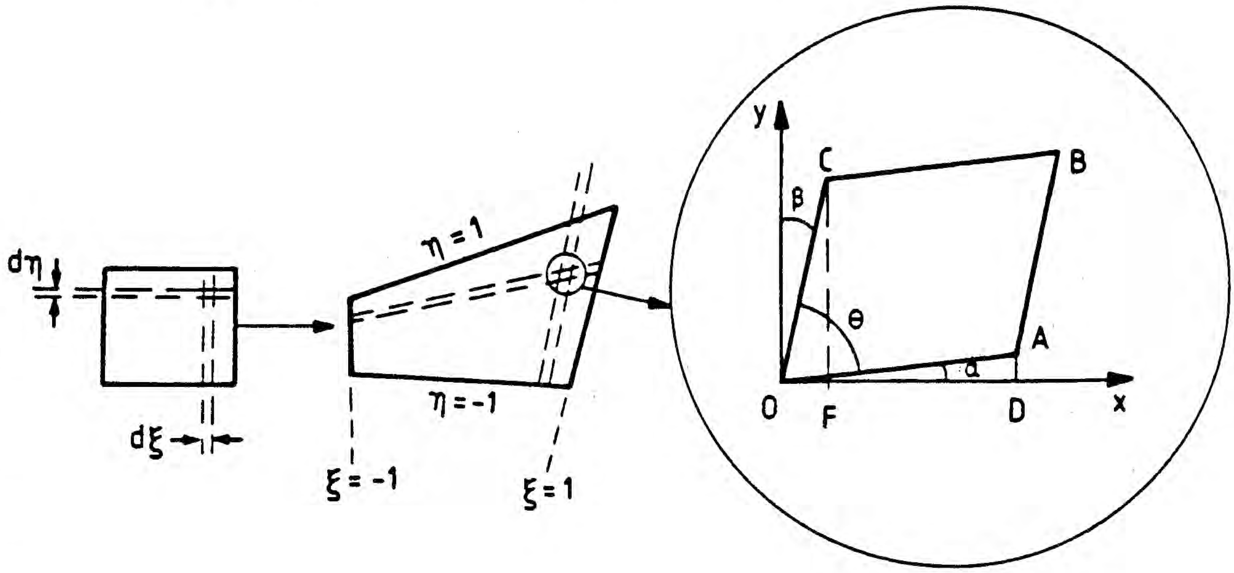
Onde $[J]$ é matriz do Jacobiano. Invertendo-se tem-se

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\[2mm] -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Onde $|J|$ é o determinante do Jacobiano:

$$\boxed{|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}}$$

$|J|$ é um fator de escala de área para o mapeamento que leva do espaço paramétrico para o espaço cartesiano.



Neste caso o retângulo infinitesimal "$d\xi d\eta$" é mapeado para o paralelogramo infinitesimal "OABC".

Tem-se que: $OD = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi$, $CF = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta$,

$AD = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi$ e $OF = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta$

A área do paralelogramo "OABC" é a área "$d\xi d\eta$" multiplicada por $|J|$:

$$\begin{aligned} OABC &= 2(OAC) \\ &= OA(OC \operatorname{sen}\theta) \\ &= OA \cdot OC \cdot \cos(90° - \theta) \\ &= OA \cdot OC \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OABC &= OA \cdot OC(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta) \\ &= OA\cos\alpha \cdot OC\cos\beta - OA\operatorname{sen}\alpha \cdot OC\operatorname{sen}\beta \\ &= OD \cdot CF - AD \cdot OF \end{aligned}$$

$\therefore \boxed{OABC = |J|\, d\xi\, d\eta}$

Em um elemento isoparamétrico bi-linear o Jacobiano pode ser obtido como mostrado abaixo.

Usando as relações $x = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i$ e $y = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i$, tem-se:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i$$

Ou ainda,

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix}$$

E o determinante do Jacobiano é:

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} .$$ Isto resulta em

$$|J| = \frac{1}{8} \Big\{ \big[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3) \big] +$$
$$\big[(x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4) \big] \cdot \xi +$$
$$\big[(x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3) \big] \cdot \eta \Big\} .$$

Observe que um paralelogramo tem $|J| =$ const. em todos os pontos.

Deformações de um ponto no elemento

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i u_i \qquad v = \sum_{i=1}^{4} N_i v_i$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad \boxed{\{u\} = [N]\{d\}}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \qquad \boxed{\{\varepsilon\} = [D]\{u\}}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{\varepsilon\} = [B]\{d\}}$$

onde,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad \boxed{\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}}$$

Integração: matriz de rigidez do elemento

$$[k] = \iint [B]^T [E][B]\, t\, dx\, dy \qquad \boxed{[B] = [B(x,y)]}$$

$$\boxed{[k] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T [E][B]\, t\, |J|\, d\xi\, d\eta} \qquad \boxed{[B] = \left[B(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))\right]}$$

- Integração numérica: Quadratura de Gauss

A integração analítica para a obtenção da matriz de rigidez do elemento é impraticável no caso geral. Em elementos finitos em geral utiliza-se a integração numérica de Gauss.

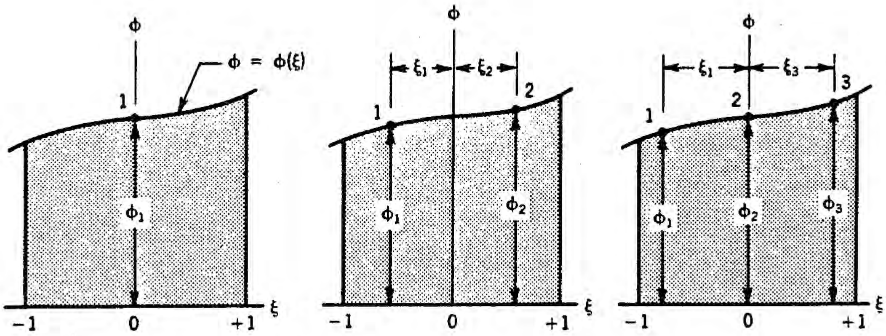
Uma dimensão

"Um polinômio de grau $2n-1$ é integrado exatamente por uma quadratura de Gauss com n pontos"

$$I = \int_{-1}^{1} \phi(\xi)\, d\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i \phi_i = W_1\phi_1 + W_2\phi_2 + \dots + W_n\phi_n$$

No caso mais geral a integração tem um caráter aproximado:

$$\boxed{I = \int_{-1}^{1} \phi(\xi)\, d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} W_i \phi_i}$$



(a) (b) (c)

$n = 1$ — 1 ponto de amostragem

$n = 2$ — 2 pontos

$n = 3$ — 3 pontos

SAMPLING POINTS AND WEIGHTS FOR GAUSS QUADRATURE OVER THE INTERVAL $\xi = -1$ TO $\xi = +1$.

Order n	Location ξ_i of Sampling Point	Weight Factor W_i
1	0.	2.
2	$\pm 0.57735\ 02691\ 89626 = \pm 1/\sqrt{3}$	1.
3	$\pm 0.77459\ 66692\ 41483 = \pm\sqrt{0.6}$	$0.55555\ 55555\ 55555 = \frac{5}{9}$
	0.	$0.88888\ 88888\ 88888 = \frac{8}{9}$
4	$\pm 0.86113\ 63115\ 94053 = \pm\left[\frac{3+2r}{7}\right]^{1/2}$	$0.34785\ 48451\ 37454 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6r}$
	$\pm 0.33998\ 10435\ 84856 = \pm\left[\frac{3-2r}{7}\right]^{1/2}$	$0.65214\ 51548\ 62546 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6r}$
	where $r = \sqrt{1.2}$	

A integração de Gauss é aproximada quando $\phi(\xi)$ não é um polinômio. Porém, quantos mais pontos de amostragem forem utilizados, mais precisa vai ser a integração numérica.

Os pontos de amostragem são também chamados de pontos de Gauss.

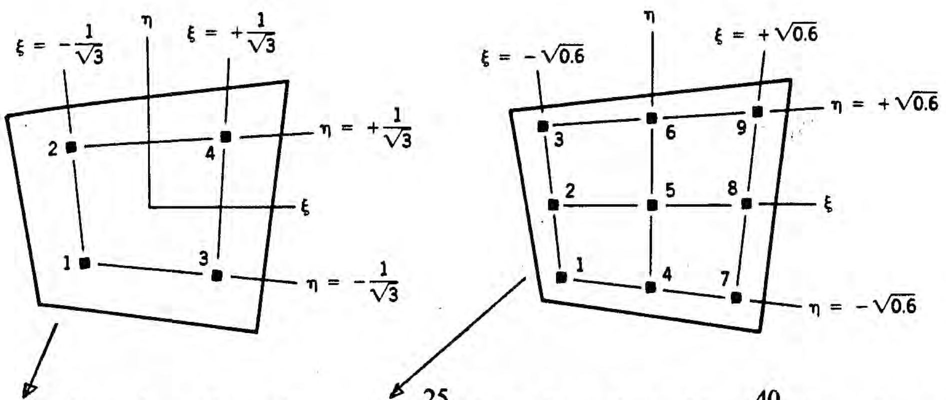
Duas dimensões

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \cong \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{m} W_i\, \phi(\xi_i,\eta) \right] d\eta$$

$$\cong \sum_{j=1}^{m} W_j \left[\sum_{i=1}^{m} W_i\, \phi(\xi_i,\eta_j) \right]$$

$\therefore$

$$\boxed{I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \cong \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} W_i W_j\, \phi(\xi_i,\eta_j)}$$

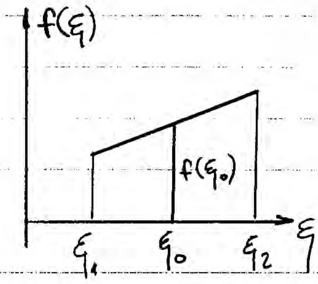


$$I \approx \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \qquad I \approx \frac{25}{81}(\phi_1 + \phi_3 + \phi_7 + \phi_9) + \frac{40}{81}(\phi_2 + \phi_4 + \phi_6 + \phi_8) + \frac{64}{81}\phi_5$$

Mais tarde será visto qual a ordem de quadratura ($n \times n$) que é adequada para diversos elementos.
Também será visto que alguns elementos fornecem melhores resultados com uma ordem reduzida, isto é, utilizando-se menos pontos de Gauss do que seria adequado.

- Um pouco mais sobre integração de Gauss

função linear $\rightarrow 2n-1=1 \Rightarrow n=1$



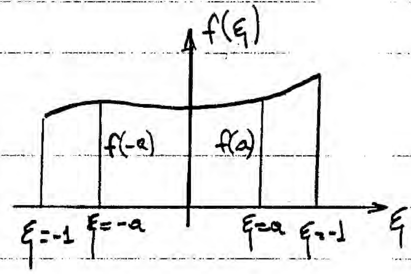
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi)\,d\xi = \underbrace{\underbrace{(\xi_2-\xi_1)}_{\text{altura}}\ \underbrace{f(\xi_0)}_{\text{base média}}}_{\text{área do trapézio}} = W_1 f(\xi_0)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -1 \\ \xi_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{W_1 = 2},\ \boxed{\xi_0 = 0}$$

função cúbica $\longrightarrow 2n-1=3 \Rightarrow n=2$

$$f(\xi) = C_0 + C_1\xi + C_2\xi^2 + C_3\xi^3$$

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi$$



$I_{exata} = 2C_0 + \frac{2C_2}{3}$ (independe de C_1 e C_3)

Note que não há diferença entre quadrático e cúbico. Isto porque ξ^3 é uma função ímpar e $\int_{-1}^{1}\xi^3 d\xi = 0$.

Escolha dois pontos de amostra simétricos com mesmo peso:

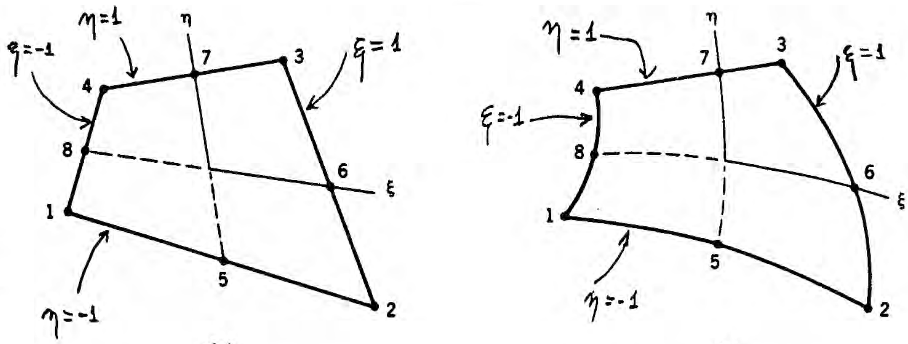
$$I = W f(-a) + W f(a) = 2W(C_0 + C_2 a^2)$$

Em que condições $I = I_{exata}$?

$e = I - I_{exata}$ $\quad e_{min} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial C_0} = 0 \Rightarrow 2 - 2W = 0 \Rightarrow \boxed{W = 1} \\ \dfrac{\partial e}{\partial C_2} = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{3} - 2Wa^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \pm 1/\sqrt{3}} \end{cases}$

erro

- Elementos isoparamétricos quadráticos com quatro lados

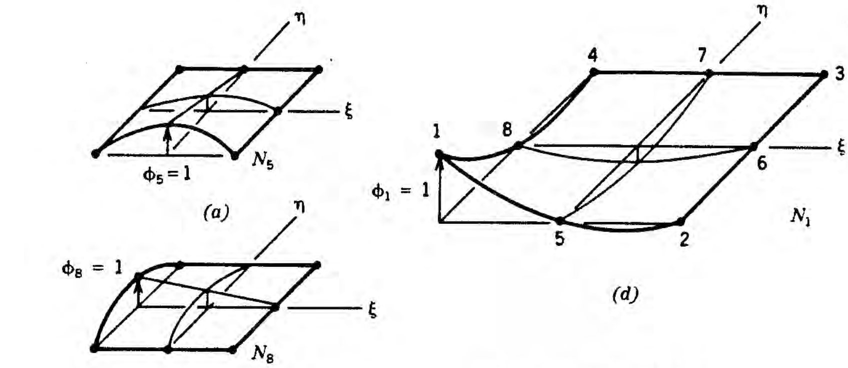


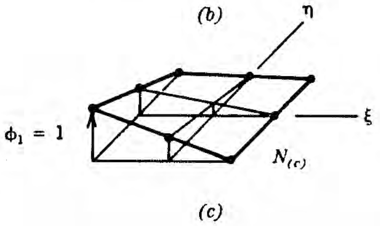
(a) Lados retos e nós nos meios dos lados

(b) Lados curvos e nós fora dos meios dos lados

Elemento "Serendipity" – Q8

Funções de forma no espaço paramétrico (ξ, η)





(a) $N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$

(b) $N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$

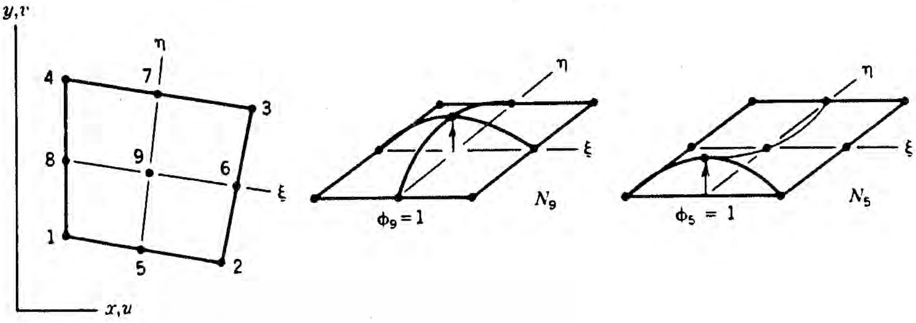
(c) $N_{(c)} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$

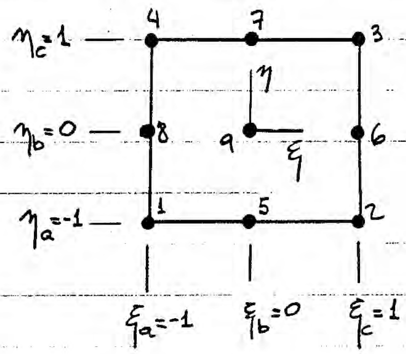
(d) $N_1 = N_{(c)} - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8$

$$N_1 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \tfrac{1}{2}(N_8 + N_5) \qquad N_5 = \tfrac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$
$$N_2 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \tfrac{1}{2}(N_5 + N_6) \qquad N_6 = \tfrac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$
$$N_3 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \tfrac{1}{2}(N_6 + N_7) \qquad N_7 = \tfrac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$
$$N_4 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \tfrac{1}{2}(N_7 + N_8) \qquad N_8 = \tfrac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

Elemento Lagrangeano - Q9

Funções de forma no espaço paramétrico (ξ, η)





$$N_{a\xi} = \frac{(\xi-\xi_b)(\xi-\xi_c)}{(\xi_a-\xi_b)(\xi_a-\xi_c)} \qquad N_{a\eta} = \frac{(\eta-\eta_b)(\eta-\eta_c)}{(\eta_a-\eta_b)(\eta_a-\eta_c)}$$

$$N_{b\xi} = \frac{(\xi-\xi_a)(\xi-\xi_c)}{(\xi_b-\xi_a)(\xi_b-\xi_c)} \qquad N_{b\eta} = \frac{(\eta-\eta_a)(\eta-\eta_c)}{(\eta_b-\eta_a)(\eta_b-\eta_c)}$$

$$N_{c\xi} = \frac{(\xi-\xi_a)(\xi-\xi_b)}{(\xi_c-\xi_a)(\xi_c-\xi_b)} \qquad N_{c\eta} = \frac{(\eta-\eta_a)(\eta-\eta_b)}{(\eta_c-\eta_a)(\eta_c-\eta_b)}$$

$$N_{a\xi} = \frac{(\xi)(\xi-1)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(\xi^2-\xi) \qquad N_{a\eta} = \frac{1}{2}(\eta^2-\eta)$$

$$N_{b\xi} = \frac{(\xi+1)(\xi-1)}{(+1)(-1)} = (1-\xi^2) \qquad N_{b\eta} = (1-\eta^2)$$

$$N_{c\xi} = \frac{(\xi+1)(\xi)}{(2)(1)} = \frac{1}{2}(\xi^2+\xi) \qquad N_{c\eta} = \frac{1}{2}(\eta^2+\eta)$$

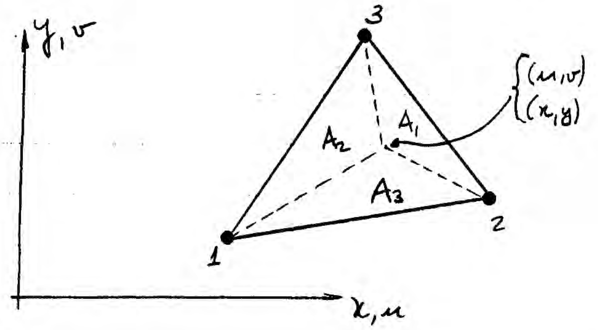
$$N_1 = N_{a\xi} N_{a\eta} \qquad N_2 = N_{c\xi} N_{a\eta} \qquad N_3 = N_{c\xi} N_{c\eta}$$

$$N_4 = N_{a\xi} N_{c\eta} \qquad N_5 = N_{b\xi} N_{a\eta} \qquad N_6 = N_{c\xi} N_{b\eta}$$

$$N_7 = N_{b\xi} N_{c\eta} \qquad N_8 = N_{a\xi} N_{b\eta} \qquad N_9 = N_{b\xi} N_{b\eta}$$

Elementos isoparamétricos triangulares

Elemento linear (triangulo de deformação constante - CST)-T3



Coordenadas naturais (coordenadas de área):

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \qquad L_2 = \frac{A_2}{A} \qquad L_3 = \frac{A_3}{A} \qquad A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3$$
$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3$$

Neste caso tem-se que: $N_1 = L_1$
$N_2 = L_2$
$N_3 = L_3$

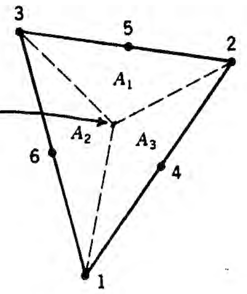
e,

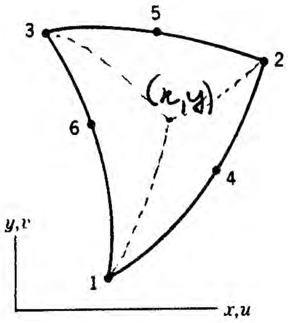
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad \boxed{\{u\} = [N]\{d\}}$$

Vê-se que a formulação anterior do elemento T_3 já era uma formulação isoparamétrica pois deslocamentos e coordenadas são interpolados da mesma forma.

Elemento quadrático

$(L_1, L_2, 1-L_1-L_2)$
coord. naturais de um ponto





Espaço paramétrico
(lados retos)

Espaço cartesiano
(real, lados curvos)

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1 \qquad N_2 = (2L_2 - 1)L_2 \qquad N_3 = (2L_3 - 1)L_3$$

$$N_4 = 4L_1L_2 \qquad N_5 = 4L_2L_3 \qquad N_6 = 4L_3L_1$$

Observe que $N_i = N_i(L_1, L_2)$ pois $L_3 = 1 - L_1 - L_2$.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \\ x_6 \\ y_6 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [N]\{c\}}$$

e

$$\boxed{\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{d\}}$$

• Diferenciação e Jacobiano para elemento triangulares

Observe que, apesar de existirem três coordenadas de área, existem apenas duas coordenadas naturais (ξ, η), onde:

$$L_1 = \xi$$
$$L_2 = \eta$$
$$L_3 = 1 - \xi - \eta .$$

Desta forma, a diferenciação de uma função de forma N_i em relação às coordenadas naturais pode ser expressa por:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}$$

A matriz do Jacobiano, para o elemento quadrático, pode então ser obtida:

$$x = \sum_{i=1}^{6} N_i x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{6} N_i y_i$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{6,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \dots & N_{6,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{bmatrix}$$

E a diferenciação em relação às coordenadas cartesianas é:

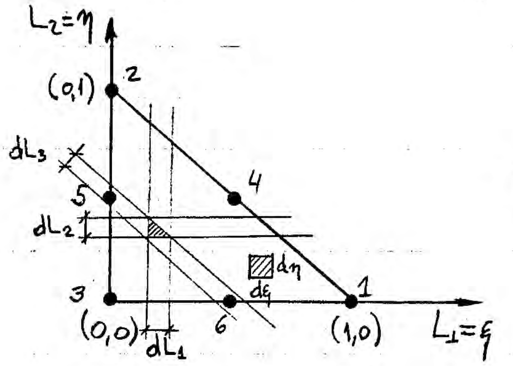
$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix}$$

Deformações de um ponto

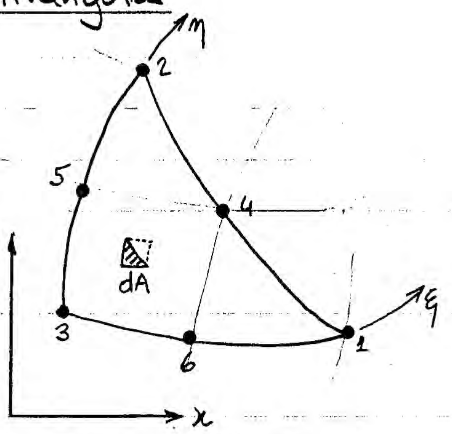
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \cdots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & & N_{6,y} & N_{6,x} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{\varepsilon\} = [B]\{d\}}$$

- Integração Numérica para Triângulos



Espaço paramétrico



Espaço cartesiano

$$I = \int_A \phi(L_1, L_2, 1-L_1-L_2)\, dA \qquad \text{onde} \qquad \boxed{dA = \frac{1}{2}|J|\, d\xi\, d\eta}$$

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

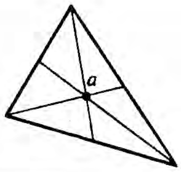
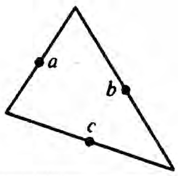
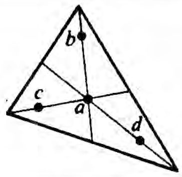
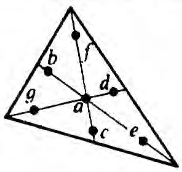
O fator $\frac{1}{2}$ aparece em dA porque o determinante do Jacobiano representa um fator de escala entre a área do quadrilátero infinitesimal $d\xi\, d\eta$ e a área da sua imagem no espaço cartesiano (que também é um quadrilátero). Como dA é um triângulo infinitesimal, o fator $\frac{1}{2}$ é necessário.

Para a integração numérica a integral I é aproximada por:

$$\boxed{I \cong \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{npts} W_i |J_i| \phi_i}$$

, onde as coordenadas e os pesos dos pontos de Gauss estão mostrados abaixo.

NUMERICAL INTEGRATION FORMULAE FOR TRIANGLES

Order (m)	Fig.	Error $O(h^{m+1})$	Points	Triangular Co-ordinates	Weights	Nº Points $(npts)$
Linear $(m=1)$		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1	1
Quadratic $(m=2)$		$R = O(h^3)$	a b c	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$	3
Cubic $(m=3)$		$R = O(h^4)$	a b c d	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ 0·6, 0·2, 0·2 0·2, 0·6, 0·2 0·2, 0·2, 0·6	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$	4
Quintic $(m=5)$		$R = O(h^6)$	a b c d e f g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0·22500,00000 0·13239,41527 0·12593,91805	7

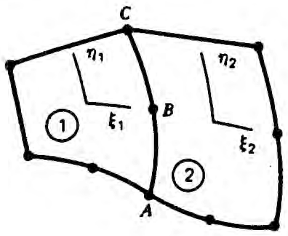
with
α_1 = 0·0597158717
β_1 = 0·4701420641
α_2 = 0·7974269853
β_2 = 0·1012865073

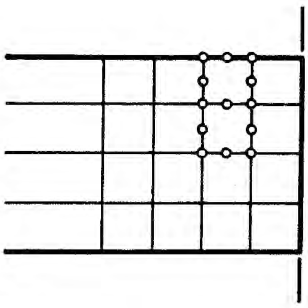
Na expressão acima os pesos W_i são obtidos diretamente utilizando coordenadas de área triangulares (não são obtidos a partir de produto de pesos unidimensionais). Por isso só aparece um somatório na expressão. Observe que a soma dos pesos em cada ordem é sempre 1, o que indica que os pesos estão normalizados em relação a uma unidade de área do triângulo.

Uma ordem de erro $O(h^{n+1})$ corresponde a um grau de precisão n. O grau de precisão se refere ao grau do polinômio completo (no espaço cartesiano) de mais alta ordem que é integrado exatamente pela integração numérica.

- ## Validade dos elementos isoparamétricos

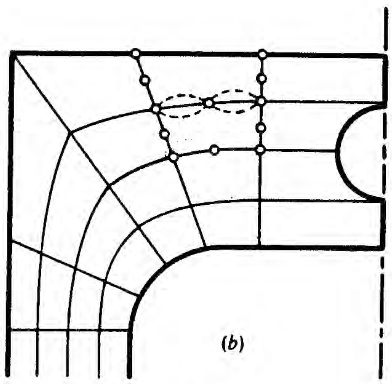
Continuidade (geométrica e de deslocamentos) entre elementos





(a)

Espaço Paramétrico



(b)

Espaço cartesiano

– Teorema 1:

"Se dois elementos adjacentes têm funções de forma que satisfazem as condições de continuidade no espaço paramétrico, então os elementos distorcidos no espaço cartesiano satisfazem condições de continuidade geométrica e condições de continuidade em deslocamentos".

Exercício proposto: Demonstre o teorema.

Completitude (condição necessária para convergência)

- Teorema 2:

"A condição de deformação constante é satisfeita para todos os elementos isoparamétricos".

Demonstração:

Considere, sem perda de generalidade, um campo de deslocamentos lineares (deformação constante) u:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y \qquad (1)$$

Os mesmos deslocamentos expressões em termos de deslocamento nodais são:

$$u = \sum_i N_i u_i \qquad (2)$$

Se a expressão (1) for avaliada em cada nó resulta em:

$$u_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (2) tem-se:

$$u = a_0 \sum_i N_i + a_1 \sum_i N_i x_i + a_2 \sum_i N_i y_i . \qquad (4)$$

Utilizando a interpolação isoparamétrica de coordenadas, $x = \sum_i N_i x_i$ e $y = \sum N_i y_i$, tem-se:

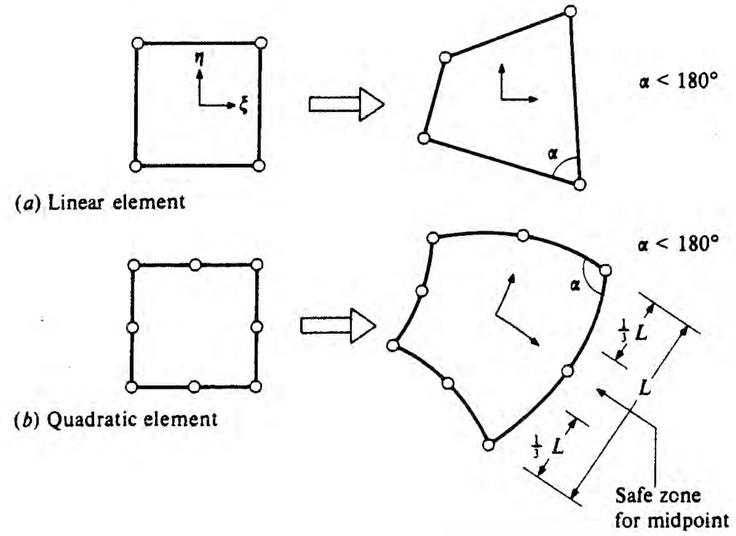
$$u = a_0 \sum_i N_i + a_1 x + a_2 y \qquad (5)$$

Comparando (1) com (5) vê-se que o campo de deslocamentos lineares fica perfeitamente reproduzido na formulação isoparamétrica se $\sum_i N_i = 1$. Como isto é sempre verdade, fica demonstrado o teorema.

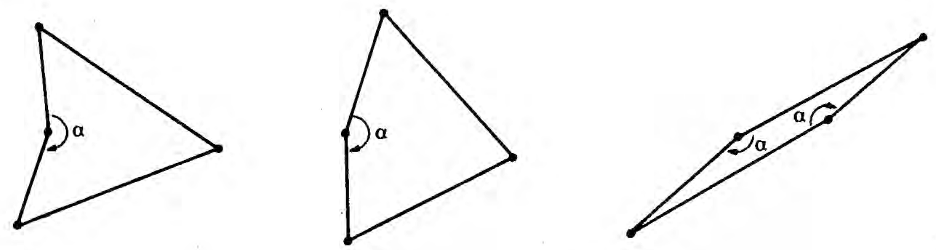
• **Limitação na distorção de elementos isoparamétricos**

Para que se tenha unicidade do mapeamento do espaço paramétrico para o espaço cartesiano (mapeamento unívoco – "um-para-um") é necessário que o sinal do determinante do Jacobiano não se modifique ao longo de todo o domínio mapeado.

A figura abaixo mostra alguma regras para manter a unicidade do mapeamento.

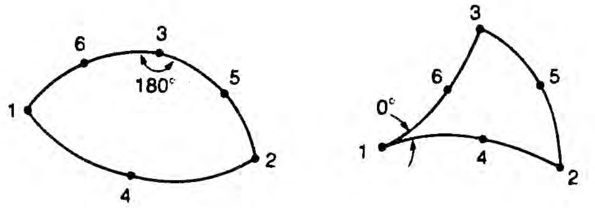


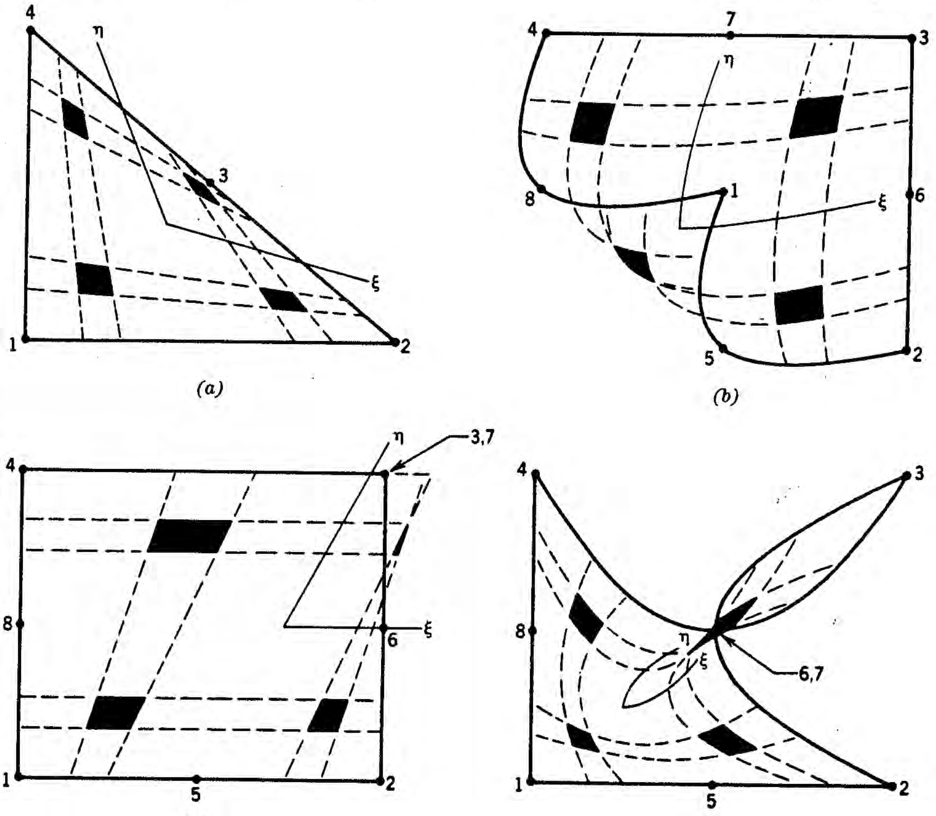
Em seguida são mostrados alguns exemplos de mapeamentos não válidos ou que resultam em elemento mal-condicionados.



$\alpha > 180°$ $\qquad$ $\alpha \simeq 180°$ $\qquad$ $\alpha \simeq 180°$

$|J| = const \simeq 0.$





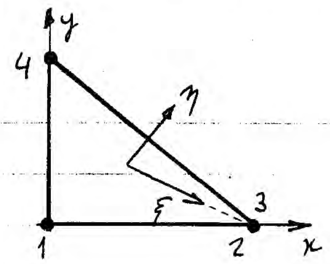
(a) (b) (c) (d)

A título de exercício vai-se mostrar para um elemento bi-linear mal-conformado aonde o determinante do Jacobiano é nulo ou troca de sinal.

Neste caso,

$$|J| = \frac{1}{8}\Big\{\big[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\big] +$$
$$\big[(x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)\big]\cdot\xi +$$
$$\big[(x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3)\big]\cdot\eta\Big\}$$

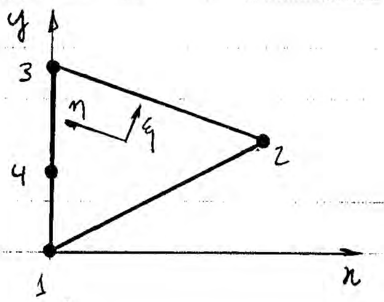
(a) Elemento com lado colapsado



lado $\xi = 1$

$|J| = 0 \quad \forall \eta$

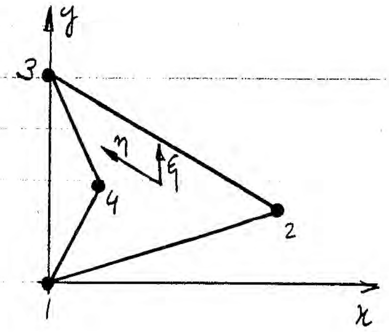
(b) Ângulo igual a 180°



ponto $\xi = -1, \ \eta = 1$

$|J| = 0$

(c)



pontos $\begin{cases} \xi = -1, \ \eta = -1 \\ \xi = 1, \ \eta = -1 \\ \xi = 1, \ \eta = 1 \end{cases}$ $|J| > 0$

ponto $\xi = -1, \ \eta = 1$ $|J| < 0$

Como o determinante do Jacobiano é negativo em 4 e positivo em 1, 2 e 3, então $|J| = 0$ em um arco em torno do nó 4.